Sains Indonesia Vol. 9, No.3 (2004) 1-4

Kajian Awal Akar Hiperbolik dari Persamaan Polinomial Derajat n

Djati Kerami, Hengki Tasman, Imas Suparni

Departemen Matematika FMIPA UI, Kampus UI Depok Indonesia-16424
djatikr@makara.cso.ui.ac.id

Abstrak

Dalam makalah dibahas pengertian dasar bilangan hiperbolik dan penerapannya pada penentuan akar persamaan polinomial. Ditunjukkan bahwa untuk setiap pasang akar real berhubungan dengan sepasang bilangan hiperbolik murni yang saling sekawan. Selanjutnya dibuktikan bahwa, banyaknya akar hiperbolik dari persamaan polinomial derajat n adalah n^2.

Abstract

This paper describe the basic notion of unusual numbers called hyperbolic numbers and it's application on determining the roots of polynomial equation. The objective of this paper is to demonstrate by using a hyperbolic numbers system that for a pair of real root there exists also a pair of hyperbolic root. It was also proved that n-degree polynomial equation has exactly n^2 hyperbolic roots.

***Key Words:** hyperbolic numbers, hyperbolic plane, roots of n-degree polynomial equation.*

1. PENDAHULUAN

Kajian aljabar mengenai bilangan hiperbolik jarang dilakukan orang walaupun sebenarnya hal ini merupakan kajian khusus dalam aljabar Clifford [1]. Kajian aljabar Clifford itu sendiri sudah sejak lama dilakukan, sejalan dengan diketengahkannya teori relativitas oleh Eistein. Secara geometris, sistem bilangan hiperbolik (disebut juga *spacetime number*) merupakan alternatif pemahaman konsep relativitas secara sederhana. Dari bentuk penyajian, sistem bilangan hiperbolik ini mirip dengan sistem bilangan kompleks seperti yang telah banyak dikenal sebelumnya. Yang menjadi masalah umum dengan pendefinisian sistem bilangan tersebut selanjutnya adalah bagaimana sifat-sifat manipulasi aljabar serta penerapan matematisnya.

Dalam makalah ini dibahas pengertian dasar bilangan hiperbolik serta penyajiannya dalam sistem bilangan hiperbolik. Di sini dilakukan penjabaran lebih spesifik dalam penerapannya pada penentuan akar persamaan polinomial dalam lapangan real. Penjabaran dilakukan melalui beberapa contoh dan penggambaran geometrisnya pada bidang hiperbolik [2]. Dalam hal ini, diturunkan suatu teorema yang diawali dengan teorema mengenai keberadaan bilangan hiperbolik dalam hubungan dengan akar realnya.

Kedua teorema tersebut merupakan penyajian formal dari beberapa contoh sederhana yang diberikan oleh Borota et al. dalam [1], dengan menggunakan beberapa contoh sederhana.

2. BILANGAN HIPERBOLIK

Telah kita ketahui dalam sistem bilangan real, persamaan polinomial dalam lapangan real $x^2 - 1 = 0$ mempunyai penyelesaian bilangan real yaitu $x = \pm 1$. Di sini dikatakan bahwa $x = +1$ dan $x = -1$ merupakan akar dari $x^2 - 1 = 0$, karena $x = +1$ maupun $x = -1$ memenuhi persamaan. Sistem bilangan real ini dapat kita perluas dengan mendefinisikan adanya suatu bilangan 'baru', disebut dengan bilangan unipoten j, yang bersifat $j \neq 1$, tetapi $j^2 = 1$. Dengan pendefinisian tersebut persamaan $x^2 - 1 = 0$ mempunyai 2(dua) buah penyelesaian baru yaitu $x = \pm j$.

Dengan menggunakan basis baku $\{1, j\}$, suatu bilangan hiperbolik $w \in H$ dapat dinyatakan dalam bentuk

$$w = x + jt, \text{ dengan } x,t \in R, j^2 = 1 \qquad (1)$$

Untuk $j \neq 0$, w disebut dengan bilangan hiperbolik murni dan untuk $j = 0$, w merupakan bilangan real.

Dengan penulisan dalam sistem bilangan hiperbolik tersebut, persamaan $x^2 - 1 = 0$ di atas ditulis sebagai $w^2 - 1 = 0$. Akar-akar persamaan tersebut sebanyak 4(empat) buah, yaitu $w = 1$ dan $w = -1$ (sebagai akar realnya) dan $w = j$ dan $w = -j$ (sebagai akar hiperbolik murninya).

Sistem bilangan hiperbolik tersebut dapat dikategorikan sebagai sistem bilangan komponen-dua. Dalam pengertian yang lebih umum [3][4], suatu bilangan w dapat dinyatakan dalam sistem komponen-dua (sistem bilangan biner) sebagai

$$w = \{a+b\varepsilon \mid a,b \in R,\ \varepsilon^2 = \beta+\gamma\varepsilon,\ \beta,\gamma \text{ tertentu } \in R\} \qquad (2)$$

Dalam hal, $\beta = -1$ dan $\gamma = 0$, memberikan $\varepsilon^2 = -1$, w merupakan sistem bilangan kompleks. Sedangkan untuk $\beta = 0$ dan $\gamma = 0$, memberikan $\varepsilon^2 = -1$, merupakan sistem bilangan hiperbolik (disebut juga sistem bilangan perpleks). Untuk $\beta,\gamma \neq 0$, memberikan sistem bilangan bipleks .

Untuk membedakan satu dengan yang lain, biasanya ε ditulis dengan simbol lain menurut sistem bilangan yang digunakan. Misalnya dalam sistem bilangan kompleks ε ditulis sebagai i dan dalam sistem bilangan hiperbolik ε ditulis sebagai j.

Dengan demikian maka himpunan bilangan hiperbolik H merupakan himpunan bilangan real yang diperluas dengan memasukan bilangan unipoten j, atau $H \equiv R[j]$. Pembentukan sistem bilangan tersebut dilakukan dengan cara yang sama seperti sistem bilangan kompleks $C \equiv R[i]$, yaitu bilangan real diperluas dengan memasukan bilangan imaginer i.
Bagian real dan bagian unipoten dari $w=x+jt$ masing-masing dinyatakan sebagai $x = \langle w \rangle_0$ dan $jt \equiv \langle w \rangle_j$. Selanjutnya, sekawan hiperbolik $w = w^+$ ditulis sebagai w^- dinyatakan sebagai $w^- = x-jt$.

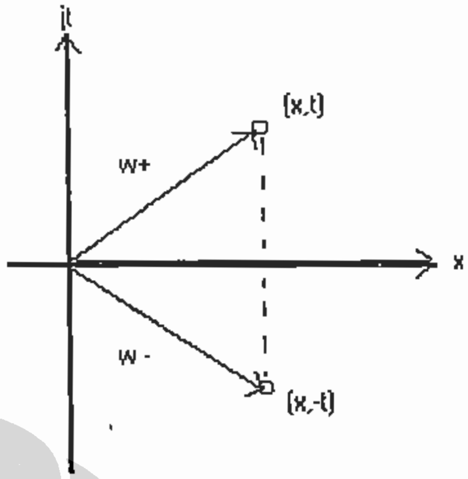
Seperti pada sistem bilangan kompleks, suatu bilangan kompleks dinyatakan sebagai suatu titik pada bidang kompleks, pada sistem bilangan hiperbolik suatu titik dinyatakan sebagai suatu titik pada bidang hiperbolik.

Bilangan yang didefinisikan seperti (1) tersebut di atas, disebut juga dengan bilangan perpleks [3][5], atau juga bilangan *spacetime* [1].

Sifat-sifat dasar lain dari bilangan hiperbolik serta manipulasi aritmetik dua bilangan hiperbolik dapat dilihat pada [1], [6].

3. AKAR PERSAMAAN POLINOMIAL DERAJAT n

Dalam makalah ini akan dibuktikan bahwa persamaan polinomial derajat n yang mempunyai n buah akar real berbeda, mempunyai n^2 buah akar hiperbolik. Dalam pembuktian akan digunakan teorema eksitensi sebagai berikut:



Gambar 1. $w^+ = (x,t)$ dan $w^- = (x,-t)$ dalam bidang hiperbolik

Teorema 1 (eksistensi):
Pada persamaan polinomial derajat n (dengan $n \geq 2$), untuk sepasang akar real $w=a$ dan $w=b$ terdapat sepasang akar hiperbolik murni yang saling sekawan, yaitu

$$w^+ = [a + (b-a)/2] + (b-a)/2\, j$$
$$w^- = [a + (b-a)/2] - (b-a)/2\, j \qquad (2)$$

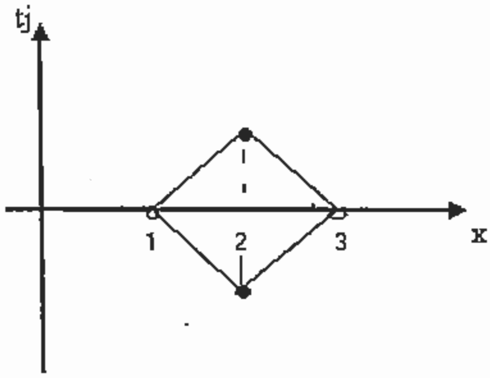
Teorema tersebut tidak dibuktikan, tetapi kebenaran teorema ini akan diperlihatkan melalui beberapa contoh sederhana sebagai berikut:

Polinomial derajat 2

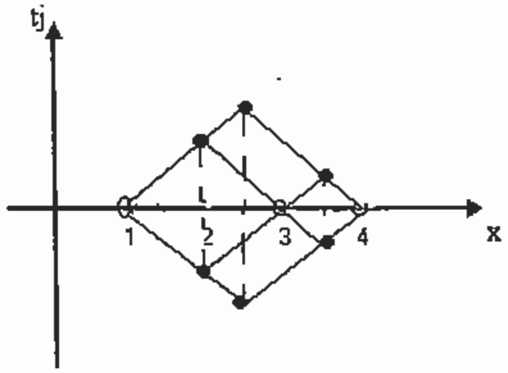
$$w^2 + aw + b = 0, \text{ dengan } a,b \in R.$$

Kita ambil misalnya, $w^2 - 4w + 3 = 0$. Persamaan tersebut mempunyai 2(dua) buah akar real berbeda, yaitu $w = 1$ dan $w = 3$. Pada bidang hiperbolik dinyatakan sebagai titik $x = 1$ dan $x = 3$. Kedua akar ini merupakan bilangan hiperbolik $w = 1 + j0$ dan $w = 3 + j0$.
Dengan menyatakan dalam bentuk $w = 2 \pm 1$, dan oleh karena $j = \pm 1$, maka 2(dua) buah bilangan hiperbolik murni yang berhubungan adalah $w = 2+j$ dan $w=2-j$. Dapat diperiksa bahwa baik $w = 2+j$ maupun $w = 2+j$ memenuhi persamaan $w^2 - 4w + 3 = 0$.

Pada bidang hiperbolik hubungan keempat akar hiperbolik yang terdiri dari 2(dua) akar real dan 2(dua) akar hiperbolik murni dapat digambarkan pada gambar 2 di bawah ini.



Gambar 2. Empat akar hiperbolik terdiri atas dua akar real ('o') dan dua akar hiperbolik murni ('•').



Gambar 3. Enam akar hiperbolik terdiri atas tiga akar real('0') dan enam akar hiperbolik murni('•;).

Pada gambar 2 di atas, akar hiperbolik $w = 2+j$ merupakan perpotongan dari garis lurus melalui $x = 1$ dan garis lurus melalui $x = 3$. Garis pertama memotong sumbu x dengan sudut 45^0 dan garis kedua memotong sumbu x dengan sudut 135^0. Sedangkan akar hiperbolik $w = 2-j$ merupakan perpotongan garis melalui $x = 1$ bersudut 315^0 terhadap sumbu x, dan garis melalui $x=3$ bersudut 135^0 terhadap sumbu x.

Dapat diperiksa lebih lanjut (dari gambar 2 maupun persamaan (2)) bahwa akar hiperbolik $w=2+j$ diperoleh dari $[1+(3-1)/2] + [(3-1)/2]j$. Sedangkan akar hiperbolik yang lain merupakan sekawannya.

Polinomial derajat 3

$$w^3 + aw^2 + bx + c = 0, \text{ dengan } a,b,c \in R.$$

Ambil misalnya, $w^3 - 8w^2 + 19w - 12 = 0$. Persamaan tersebut mempunyai 3(tiga) buah akar real berbeda yaitu $w = 1$, $w = 3$, $w = 4$. Pada bidang hiperbolik dinyatakan sebagai $x=1$, $x=3$, dan $x=4$.

Untuk $w=1$ dan $w=3$:
akar hiperbolik yg berhubungan adalah
$w = 2+j$ dan $w=2-j$

Untuk $w=1$ dan $w=4$:
akar hiperbolik yg berhubungan adalah
$w = 5/2 + 3/2\, j$ dan $w = 5/2 - 3/2\, j$

Untuk $w=3$ dan $w=4$,:
akar hiperbolik yg berhubungan adalah
$w = 3/2 + ½\, j$ dan $w = 3/2 - ½\, j$.

Dapat diperiksa bahwa kesembilan akar tersebut memenuhi persamaan $w^3 - 8w^2 + 19w - 12 = 0$.

Hubungan kesembilan akar-akar tersebut di atas diperlihatkan pada gambar 3 di bawah ini.

Teorema 2:

Untuk suatu polinomial P(x) berderajat n yang mempunyai n buah akar real berbeda, akan terdapat n^2 buah akar hiperbolik.

Bukti:

Dari teorema sebelumnya, untuk setiap 2(dua) buah akar real berbeda selalu berhubungan dengan 2(dua) buah akar hiperbolik yang saling sekawan.

Banyaknya akar hiperbolik (termasuk akar realnya) adalah banyaknya akar real + banyaknya akar hiperbolik murni. Untuk P(x) berderajat n, banyaknya akar hiperbolik murni ini berhubungan $2\binom{2}{n}$.

Jadi, banyaknya akar hiperboliknya adalah

$$\begin{aligned} n+2\binom{2}{n} &= n+2\frac{n!}{2!(n-2)!} \\ &= n + n(n-1) \\ &= n^2 \end{aligned}$$

Dapat kita lihat pada gambar 2, persamaan polinomial derajat 2 mempunyai 4(empat) buah akar hiperbolik, dan pada gambar 3, persamaan polinomial derajat 3 mempunyai 9(sembilan) buah akar hiperbolik.

4. KESIMPULAN

Dalam sistem bilangan hiperbolik, pada persamaan polinomial derajat n, untuk setiap pasang akar real selalu berhubungan dengan sepasang akar hiperbolik murni yang saling sekawan. Disamping itu, persamaan polinomial tersebut mempunyai n^2 akar hiperbolik, yang terdiri dari n buah akar real dan $n^2 - n$ akar hiperbolik murni.

DAFTAR ACUAN

[1] Borota, Nikolae A., Eduardo Flores, Thomas J.Osler, *Spacetime numbers the easy way*, Journal

on Math. and Computer Education, Vol.34, No.2 (2000), pp.159-168.

[2] Sobczyk, Gareet, *The Hyperbolic Number Plane, The College Mathematics Journal*, 26 (1995), pp.268-280.

[3] Majernik, V., *The Perplex Number are in Fact the Binary Numbers*, Am. J.Phys, 5(1988), p.763-

[4] http://faculty.gvsu.edu/fishbacp/dynamics/ binary numbers/binary.htm, 17/12/2004, pk 15.55.

[5] Ronveaux, Andre, *About Perplex Numbers*, American Journal of Physics, 55(1987), p.392.

[6] Suparni, Imas, Pengenalan Bilangan Hiperbolik serta Penggunaannya dalam Mencari Akar polinomial, Skripsi Sarjana, Departemen Matematika FMIPA UI (2004).