

Elemen Triangular sederhana $T3\gamma_s$ untuk kasus Pelat Lentur.

Irwan KATILI

Dept. of Civil Engineering Faculty of Engineering University of Indonesia
Depok 16424 – email : katili@yexa.eng.ui.ac.id

LL

ABTRAK :

Elemen $T3\gamma_s$ adalah elemen pelat lentur sederhana yang mempunyai tiga nodal dan 3 derajat kebebasan per nodal. Elemen ini diformulasikan berdasarkan teori pelat Reissner Mindlin dan model peralihan dalam memformulasikan matriks kekakuannya. Kesederhaan elemen ini terlihat dari sedikitnya jumlah total derajat kebebasan dan penggunaan fungsi linier dalam mengaproksimasi fungsi peralihan dan geometri. Kecepatan konvergensi elemen ini relatif lambat tetapi elemen ini lulus patch test walau mengalami shear locking bila diaplikasikan pada pelat tipis. Meskipun jumlah titik integrasi telah dikurangi, shear locking tidak dapat diatasi sepenuhnya bahkan muncul masalah lain yaitu spurious zero energy modes (SZEM). Uji numerik memperlihatkan masalah SZEM hanya muncul untuk sebuah elemen saja, sedangkan bila jumlah elemen dua atau lebih, masalah ini tidak terjadi lagi.

Kata Kunci : Bending plate, finite element, Reissner-Mindlin, displacement model.

1. PENDAHULUAN

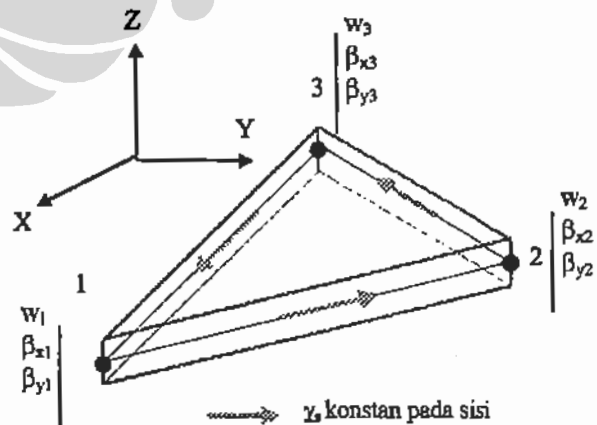
Salah satu ide pengembangan elemen pelat lentur yang dipelopori oleh Hughes dan Taylor adalah suatu konsep baru yang disebut ASSF (*Assumed Shear Strain Field*).

Konsep ini sangat diinspirasi oleh model pola integrasi khusus elemen quadrilateral 4 nodal yang diperkenalkan oleh Mac Neal (1982)^[1].

Banyak elemen triangular dan quadrilateral yang kemudian diformulasikan berdasarkan pada metode tersebut, antara lain adalah elemen $T3\gamma_s$ dari Hughes dan Taylor^[2] yang merupakan elemen triangular pertama yang diformulasikan dengan metode ASSF. Elemen ini akan mengalami shear locking jika menggunakan integrasi eksak dalam mengevaluasi matriks kekakuannya. Hughes menggarisbawahi bahwa integrasi selektif dengan 1 titik Hammer terhadap matriks $[k_s]$ memperkecil efek shear locking tetapi muncul satu pola parasit.

2. FUNGSI PERALIHAN ELEMEN $T3\gamma_s$

Berikut ini akan dibahas secara rinci formulasi elemen pelat $T3\gamma_s$ dimana kekhususan pada elemen $T3\gamma_s$, deformasi geser transversal diekspresikan dengan menggunakan interpolasi khusus dan disebut metode proyeksi geser yang merupakan salah satu tipe metode ASSF.



Gambar. 1 Geometri dan derajat kebebasan elemen pelat triangular $T3\gamma_s$

Elemen ini menggunakan fungsi bentuk yang sama untuk fungsi peralihan dan fungsi geometri, maka elemen triangular ini disebut elemen *isoparametrik*.

Dengan demikian fungsi peralihan elemen secara lengkap dinyatakan sebagai berikut:

$$w = \sum_{i=1}^3 N_i w_i$$

$$\beta_x = \sum_{i=1}^3 N_i \beta_{xi} \quad (1)$$

$$\beta_y = \sum_{i=1}^3 N_i \beta_{yi}$$

N_i = fungsi bentuk pada nodal i
 $N_1 = 1 - \xi - \eta$; $N_2 = \xi$; $N_3 = \eta$ (2)

Hubungan deformasi lentur dan kelengkungan dinyatakan sebagai berikut

3. DEFORMASI & KELENGKUNGAN

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3a)$$

dimana :

$$\begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (3b)$$

Hubungan antara kelengkungan $\{\chi\}$ dengan peralihan nodal elemen dapat pula dinyatakan sebagai berikut :

$$\{\chi\} = [B_b] \{u_n\} \quad (4)$$

dimana :

$$[B_b] = \begin{bmatrix} 0 & N_{i,x} & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & N_{i,y} \\ 0 & N_{i,y} & N_{i,x} & \dots \end{bmatrix} \quad i=1,3 \quad (5)$$

$$\{u_n\} = \langle \dots ; w_i \beta_{xi} \beta_{yi} ; \dots i=1,3 \rangle \quad (6)$$

$N_{i,x}$ dan $N_{i,y}$ dapat dinyatakan sebagai :
 $N_{i,x} = j_{11} N_{i,\xi} + j_{12} N_{i,\eta}$
 $N_{i,y} = j_{21} N_{i,\xi} + j_{22} N_{i,\eta}$

4. DEFORMASI GT.

Untuk mendefinisikan medan deformasi geser (GT) pada elemen $T3\gamma_s$, diterapkan metode proyeksi geser transversal (*shear projected method*).

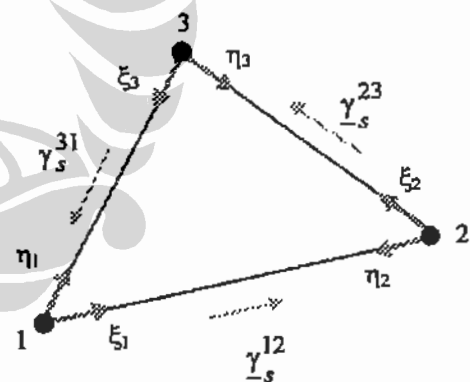
Medan deformasi geser diaproksimasi secara linier pada setiap elemen. Hal ini dinyatakan sebagai berikut :

$$\langle \gamma \rangle = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^3 N_i \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}_i \quad (7)$$

dimana: N_i adalah fungsi bentuk pada nodal i dan $\langle \gamma_{xz} \gamma_{yz} \rangle_i$ adalah deformasi geser pada nodal i

Deformasi geser pada nodal i $\langle \gamma_{xz} \gamma_{yz} \rangle_i$ diperoleh dengan memproyeksikan regangan geser dari sumbu koordinat kartesian ke natural dengan menggunakan invers matrik Jacobian dan dinyatakan sebagai berikut

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} \gamma_{\xi z} \\ \gamma_{\eta z} \end{Bmatrix}_i \quad (8)$$



ξ_i dan η_i adalah sistim koordinat natural pada nodal i
Gambar. 2 Elemen Referensi $T3\gamma_s$

Dengan mensubstitusi nilai invers Jacobian pada sistim koordinat tiap-tiap nodal pada persamaan (8), maka didapat :

Untuk nodal 1 (sistim koordinat ξ_1, η_1) :

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}_1 = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{31} & y_{12} \\ x_{13} & x_{21} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{\xi z} \\ \gamma_{\eta z} \end{Bmatrix}_1 \quad (9)$$

Untuk nodal 2 (sistim koordinat ξ_2, η_2) :

$$\begin{Bmatrix} \underline{\gamma}_{xz} \\ \underline{\gamma}_{yz} \end{Bmatrix}_2 = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{12} & y_{23} \\ x_{21} & x_{32} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\gamma}_{\xi z} \\ \underline{\gamma}_{\eta z} \end{Bmatrix}_2 \quad (10)$$

Dan untuk nodal 3 (sistim koordinat ξ_3, η_3) :

$$\begin{Bmatrix} \underline{\gamma}_{xz} \\ \underline{\gamma}_{yz} \end{Bmatrix}_3 = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & y_{31} \\ x_{32} & x_{13} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\gamma}_{\xi z} \\ \underline{\gamma}_{\eta z} \end{Bmatrix}_3 \quad (11)$$

$x_{ij} = x_i - x_j$ dan $y_{ij} = y_i - y_j$
 $\langle \underline{\gamma}_{\xi z} \quad \underline{\gamma}_{\eta z} \rangle_i$ adalah regangan geser pada sistim koordinat nodal i pada bidang ξ - z dan η - z , sedangkan $\underline{\gamma}_s^{12}$, $\underline{\gamma}_s^{23}$ dan $\underline{\gamma}_s^{31}$ adalah besarnya regangan geser pada sisi 12, 23 dan 31 yang bekerja pada bidang z - s . Hubungan keduanya dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{Bmatrix} \underline{\gamma}_{\xi z} \\ \underline{\gamma}_{\eta z} \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} L_{12} \underline{\gamma}_s^{12} \\ -L_{31} \underline{\gamma}_s^{31} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

$$\begin{Bmatrix} \underline{\gamma}_{\xi z} \\ \underline{\gamma}_{\eta z} \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} L_{23} \underline{\gamma}_s^{23} \\ -L_{12} \underline{\gamma}_s^{12} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{Bmatrix} \underline{\gamma}_{\xi z} \\ \underline{\gamma}_{\eta z} \end{Bmatrix}_3 = \begin{Bmatrix} L_{31} \underline{\gamma}_s^{31} \\ -L_{23} \underline{\gamma}_s^{23} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (8) sampai dengan (14) kedalam persamaan (7), diperoleh persamaan berikut ini :

$$\{ \underline{\gamma} \} = [N_\gamma] \{ \underline{\gamma}_{sn} \} \quad (15)$$

dimana:

$$\{ \underline{\gamma}_{sn} \} = \{ \underline{\gamma}_s^{12} \quad \underline{\gamma}_s^{23} \quad \underline{\gamma}_s^{31} \} \quad (16)$$

$$[N_\gamma] = \begin{bmatrix} N_{\gamma x12} & N_{\gamma x23} & N_{\gamma x31} \\ N_{\gamma y12} & N_{\gamma y23} & N_{\gamma y31} \end{bmatrix} \quad (17)$$

dengan:

$$N_{\gamma x12} = \frac{L_{12}}{2A} (N_1 y_{31} + N_2 y_{32})$$

$$N_{\gamma y12} = \frac{L_{12}}{2A} (N_1 x_{13} + N_2 x_{23})$$

$$N_{\gamma x23} = \frac{L_{23}}{2A} (N_2 y_{12} + N_3 y_{13})$$

$$N_{\gamma y23} = \frac{L_{23}}{2A} (N_2 x_{21} + N_3 x_{31})$$

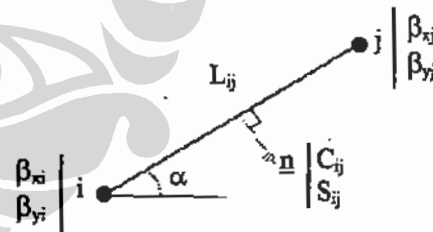
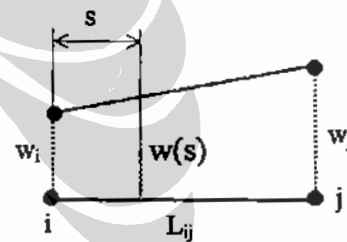
$$N_{\gamma x31} = \frac{L_{31}}{2A} (N_3 y_{23} + N_1 y_{21})$$

$$N_{\gamma y31} = \frac{L_{31}}{2A} (N_3 x_{32} + N_1 x_{12})$$

Dengan menggunakan hipotesa Mindlin, kita akan mendapatkan deformasi $\langle \underline{\gamma}_{sn} \rangle$ yang diproyeksikan pada variabel nodal w_n, β_{xn} , dan β_{yn} .

$$\underline{\gamma}_s = \frac{1}{L_{ij}} \int_0^{L_{ij}} (w_{,s} + \beta_s) ds = 0 \quad (18)$$

Dimana w dan β_s diinterpolasikan secara linier sebagai berikut :



Gambar 3 Fungsi peralihan w dan β_s diinterpolasi secara linier

$$w = \left(1 - \frac{s}{L_{ij}} \right) w_i + \frac{s}{L_{ij}} w_j \quad (19)$$

$$\beta_s = \left(1 - \frac{s}{L_{ij}} \right) \beta_{si} + \frac{s}{L_{ij}} \beta_{sj} \quad (20)$$

dengan :

$$\beta_{si} = C_{ij} \beta_{xi} + S_{ij} \beta_{yi} \quad (21a)$$

$$\beta_{sj} = C_{ij} \beta_{xj} + S_{ij} \beta_{yj} \quad (21b)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (19), (20) dan (21) kedalam persamaan (18), akan diperoleh persamaan berikut :

$$\gamma_{-s}^{ij} = \frac{1}{L_{ij}}(w_j - w_i) + \frac{1}{2}C_{ij}(\beta_{xi} + \beta_{xj}) + \frac{1}{2}S_{ij}(\beta_{yi} + \beta_{yj}) \quad (22)$$

dengan:

$$C_{ij} = \cos \alpha = \frac{x_j - x_i}{L_{ij}} = \frac{x_{ji}}{L_{ij}}$$

$$S_{ij} = \sin \alpha = \frac{y_j - y_i}{L_{ij}} = \frac{y_{ji}}{L_{ij}}$$

Berdasarkan persamaan (22) maka kita dapat menentukan deformasi untuk tiap sisi elemen dan menggabungkannya dalam bentuk matrik, yaitu :

$$\{\gamma_{-sn}\} = [A_u] \{u_n\} \quad (23)$$

dimana:

$$\{\gamma_{-sn}\} = \begin{pmatrix} \gamma_{-s}^{12} & \gamma_{-s}^{23} & \gamma_{-s}^{31} \end{pmatrix}$$

$$\{u_n\} = \langle \dots | w_i \beta_{xi} \beta_{yi} | \dots i=1,3 \rangle$$

dengan :

$$C_{12} = \frac{x_{21}}{L_{12}} ; S_{12} = \frac{y_{21}}{L_{12}} ; C_{23} = \frac{x_{32}}{L_{23}} ;$$

$$S_{23} = \frac{y_{32}}{L_{23}} ; C_{31} = \frac{x_{13}}{L_{31}} ; S_{31} = \frac{y_{13}}{L_{31}}$$

dengan mensubstitusikan persamaan (23) kedalam persamaan (15) akan diperoleh persamaan berikut :

$$\{\gamma\} = [N_\gamma] [A_u] \{u_n\} \quad (24)$$

Atau dapat ditulis sebagai berikut:

$$\{\gamma\} = [B_s] \{u_n\} \quad (25)$$

$$\text{dengan : } [B_s] = [N_\gamma] [A_n] \quad (26)$$

5. MATRIKS KEKAKUAN.

Matrik kekakuan elemen $T3\gamma_s$ didapat dengan menggunakan persamaan energi potensial total pada model peralihan klasik, yaitu :

$$\Pi^e = \Pi_{int}^e - \Pi_{ext}^e \quad (27)$$

$$\text{dengan : } \Pi_{int}^e = \Pi_{int}^b + \Pi_{int}^s \quad (28)$$

$$\Pi_{int}^b = \frac{1}{2} \int_A \langle \langle \chi \rangle [H_b] \langle \chi \rangle \rangle dA \quad (29)$$

$$\Pi_{int}^s = \frac{1}{2} \int_A \langle \langle \gamma \rangle [H_s] \langle \gamma \rangle \rangle dA \quad (30)$$

di mana :

$$[H_b] = D_b \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad D_b = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$[H_s] = D_s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad D_s = kGh$$

di mana :

D_b = kekakuan lentur

D_s = kekakuan geser

E = modulus Young

$$G = \text{modulus geser} = \frac{E}{2(1+\nu)} ;$$

k = koefisien koreksi geser;

= 5/6 untuk problem statik

= $\pi^2/12$ untuk problem dinamik

h = tebal pelat (4.2.31)

Dengan mensubstitusikan persamaan (4) dan (5) kedalam persamaan (29), akan kita dapatkan :

$$\Pi_{int}^b = \frac{1}{2} \int_A \langle \langle u_n \rangle [B_b]^T [H_b] [B_b] \langle u_n \rangle \rangle dA$$

$$\text{atau : } \Pi_{int}^b = \frac{1}{2} \langle u_n \rangle [k_b] \langle u_n \rangle \quad (31)$$

$$\text{dimana : } [k_b] = \int_A [B_b]^T [H_b] [B_b] dA \quad (32)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (25) kedalam persamaan (30), akan kita dapatkan :

$$\Pi_{int}^s = \frac{1}{2} \int_A \langle \langle u_n \rangle [B_s]^T [H_s] [B_s] \langle u_n \rangle \rangle dA$$

$$\text{atau : } \Pi_{int}^s = \frac{1}{2} \langle u_n \rangle [k_s] \langle u_n \rangle \quad (33)$$

$$\text{dimana : } [k_s] = \int_A [B_s]^T [H_s] [B_s] dA \quad (34)$$

Selanjutnya matriks kekakuan elemen diperoleh dengan menjumlahkan matriks

kekakuan lentur dan matriks kekakuan geser transversal :

$$[k] = [k_b] + [k_s] \quad (35)$$

Untuk menyederhanakan penyelesaian bentuk integrasi dari matriks kekakuan, digunakan pendekatan dengan integrasi numerik. Sehingga sebelumnya persamaan (32) dan (34) harus diekspresikan terdahulu secara lengkap ke dalam sistem koordinat natural melalui persamaan, menjadi :

$$[k_b] = \int_0^{1-\xi} \int_0^{\eta} [B_b]^T [H_b] [B_b] |J| d\xi d\eta \quad (36)$$

$$[k_s] = \int_0^{1-\xi} \int_0^{\eta} [B_s]^T [H_s] [B_s] |J| d\xi d\eta \quad (37)$$

dengan : $|J|$ = determinan matriks jacobian = 2A

Formula integrasi numerik yang dipakai pada pembahasan ini ialah formula Hammer.

Jumlah titik Hammer tergantung dari polinomial dari fungsi $\phi(\xi^i, \eta^j)$.

Matriks $[k_s]$ (persamaan 37) memerlukan tiga titik integrasi Hammer, sedangkan matriks $[k_b]$ (persamaan 36) merupakan matriks konstan sehingga dapat dikeluarkan dari integral.

Jika kita gunakan integrasi eksak (tiga titik Hammer) pada perhitungan $[k_s]$, maka pada elemen T3 γ_6 terjadi shear locking dan masalah ini bisa diperbaiki dengan menggunakan integrasi tereduksi yaitu 1 titik Hammer seperti yang diberikan pada persamaan (44) dimana $[B_s]$ dihitung pada $\xi = \eta = \frac{1}{3}$. Walaupun demikian masalah shear locking tidak sepenuhnya bisa diatasi dan tetap terjadi pada elemen ini.

Persamaan (36) dan (37) ditulis dalam bentuk sebagai berikut :

$$[k_b] = [B_b]^T [H_b] [B_b] A \quad (38)$$

$$[k_s] = [B_s]^T [H_s] [B_s] A \quad (39)$$

6. BEBAN NODAL EKIVALEN.

Metode elemen hingga merupakan metode diskritisasi, sehingga beban-beban yang bekerja pada struktur yang akan dianalisa harus diubah terlebih dahulu menjadi beban-beban terpusat yang bekerja pada titik-titik diskrit (nodal) elemen. Beban ini dikenal dengan sebutan beban nodal ekivalen.

Berdasarkan prinsip kerja virtuil luar, maka beban nodal ekivalen akibat beban merata f_z yang bekerja pada pelat adalah sebagai berikut :

$$\Pi_{ext} = \int_A w f_z dA = \langle u_n \rangle \{f_n\} \quad (40)$$

dimana :

$$\langle f_n \rangle = \langle \dots \mid f_{zi} \ 0 \ 0 \ \dots \mid i = 1,3 \rangle$$

$$f_{zi} = \int_A N_i f_z dA$$

$$= f_z \int_0^{1-\xi} \int_0^{\eta} N_i |J| d\eta d\xi = \frac{1}{3} f_z A \quad (41)$$

Untuk menyelesaikan persamaan (41) digunakan satu titik integrasi numerik Hammer.

7. GAYA DALAM.

Dalam analisa suatu pelat akan didapatkan peralihan $\{u_n\}$ pada titik-titik diskrit elemen yang ditinjau, yang selanjutnya digunakan untuk menghitung besarnya tegangan dan gaya dalam yang bekerja pada elemen tersebut.

Besarnya gaya dalam momen $\{M\}$ dan geser $\{T\}$ dapat dihitung sebagai berikut :

$$\{M\} = [H_b] [B_b] \{u_n\} \quad (42)$$

$$\{T\} = [H_s] [B_s] \{u_n\} \quad (43)$$

dimana : $\langle M \rangle = \langle M_x \ M_y \ M_{xy} \rangle$

$$\langle T \rangle = \langle T_x \ T_y \rangle$$

8. UJI NUMERIK

Diatas telah dijabarkan secara rinci formulasi dari elemen $T3\gamma_s$. Untuk mengetahui kebenaran teori formulasi tersebut dilakukan berbagai uji numerik terhadap elemen ini.

Secara umum, uji numerik pada suatu elemen yang handal harus berhasil melalui dua aspek, yaitu :

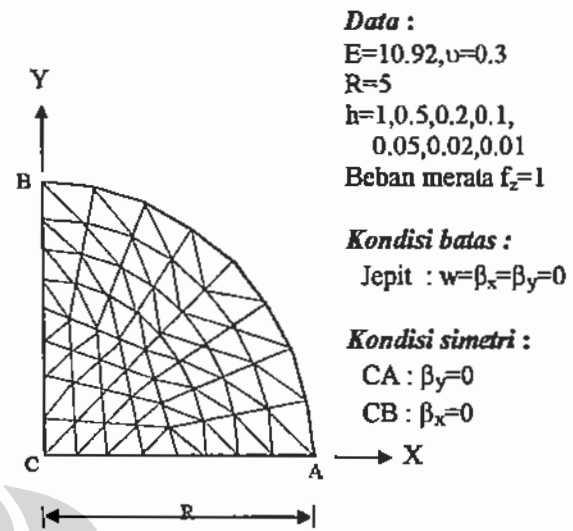
- Uji validasi elemen terdiri dari uji stabilitas dan konsistensi elemen.
- Uji akurasi elemen dengan bentuk mesh tertentu, terdiri dari uji konvergensi, distorsi geometri, blokade geser, dan sebagainya.

Pada uji akurasi elemen, hasil yang diperoleh dari uji numerik elemen $T3\gamma_s$ dibandingkan dengan solusi eksak (teoritis).

Uji numerik juga bertujuan untuk mengetahui karakteristik, kehandalan, dan kemampuan elemen ini dalam memberikan hasil perhitungan yang konvergen menuju nilai eksak dalam aplikasi metode elemen hingga. Selain itu uji numerik dapat digunakan untuk menentukan jenis modelisasi mesh yang tepat bagi elemen terkait.

8.1 UJI SHEAR LOCKING

Uji dilakukan dengan menggunakan suatu struktur pelat lingkaran (*circular*) yang sisinya terjepit (*clamped*) dengan beban merata. Karena sifat simetri dari struktur maka pelat dianalisa 1/4 bagiannya saja. Mesh yang digunakan terdiri dari 96 elemen untuk 1/4 pelat, dengan perbandingan R/h bervariasi dari 1 (tebal) sampai 200 (tipis). Solusi eksak diperoleh dari teori Kirchhoff^[3].



Data :

$$E=10.92, \nu=0.3$$

$$R=5$$

$$h=1, 0.5, 0.2, 0.1,$$

$$0.05, 0.02, 0.01$$

Beban merata $f_z=1$

Kondisi batas :

$$\text{Jepit : } w=\beta_x=\beta_y=0$$

Kondisi simetri :

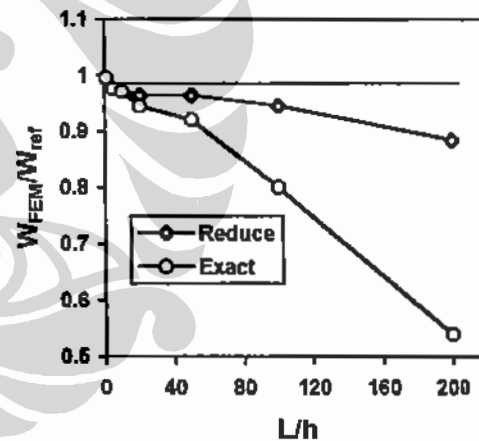
$$\text{CA : } \beta_y=0$$

$$\text{CB : } \beta_x=0$$

Solusi eksak [3]:

$$w = \frac{f_z R^4}{64 D_b} (1 - \xi^2) \left((1 - \xi^2) + \frac{8(h/R)^2}{3k(1 - \nu)} \right)$$

Gambar 4 Pelat lingkaran untuk uji blokade geser (NELT=96)



Gambar 5 Hasil uji blokade geser pada pelat melingkar perletakan jepit

Hasil uji memperlihatkan bahwa elemen $T3\gamma_s$ dengan integrasi eksak mengalami shear locking dan integrasi tereduksi dapat memperbaiki kinerja elemen tetapi tidak dapat sepenuhnya mengatasi shear locking.

8.2 UJI KONVERGENSI

Pengujian menggunakan suatu pelat lingkaran (*circular plate*) dengan kondisi

struktur simetri sehingga hanya dianalisa 1/4 bagian pelat saja. 1/4 bagian pelat tersebut dimodelisasi dengan 6, 24, 54, dan 96 buah elemen masing-masing dengan tiga variasi rasio antara radius pelat dan tebalnya sebesar 2, 5, dan 50. Kondisi batas yang digunakan berupa jepit (*clamped*, $w = \beta_x = \beta_y = 0$) pada sekeliling pelat. Sedangkan beban yang digunakan adalah beban merata.

Uji kedua bertujuan untuk mengetahui distribusi gaya dalam M_r , M_θ , T_r pada arah radial pelat untuk mesh 96 elemen.

Hasil uji berupa peralihan, gaya resultan, dan energi internal diperlihatkan dalam gambar 6-11. Dari hasil uji dapat dilihat bahwa elemen T3 γ_8 memperlihatkan konvergensi yang baik dan cenderung mendekati nilai eksak dan memberikan akurasi yang baik untuk distribusi gaya dalam pada arah radial untuk mesh 96 elemen pada kasus pelat tebal ($R/h = 5$) dan akurasi menurun pada kasus pelat tipis ($R/h = 50$) karena elemen mengalami blokade geser. Elemen T3 γ_8 memberikan akurasi yang tidak menentu pada distribusi gaya dalam T_r pada kasus pelat tipis.

Solusi Eksak [4]:

Jepit	
Peralihan vertikal :	
$w = \frac{f_z R^4}{64 D_b} (1 - \xi^2) \left((1 - \xi^2) + \frac{8(h/R)^2}{3k(1-\nu)} \right)$	
$M_r = \frac{f_z R^2}{16} (1 + \nu) \left(1 - \frac{(3 + \nu)}{(1 + \nu)} \xi^2 \right)$	
$M_\theta = \frac{f_z R^2}{16} (1 + \nu) \left(1 - \frac{(1 + 3\nu)}{(1 + \nu)} \xi^2 \right)$	
$T_r = -\frac{f_z r}{2}$	

Energi internal :

$$\Pi_{int} = \frac{f_z^2 R^6 \varphi}{384 D_b} \left(1 + \frac{4(h/R)^2}{k(1-\nu)} \right)$$

dimana :

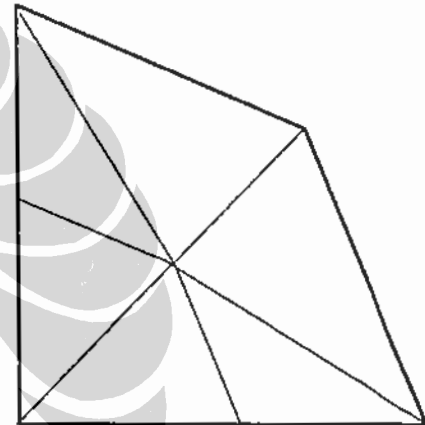
$$\varphi = \pi/2$$

φ adalah besarnya bagian pelat yang dianalisa

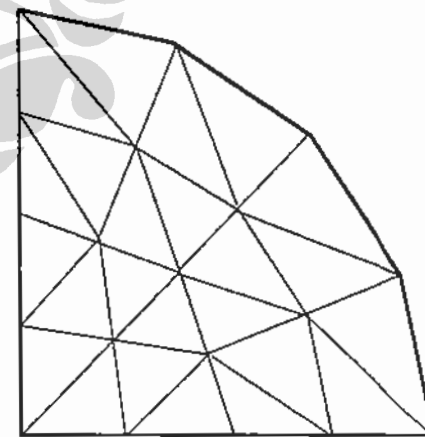
$$k = 5/6$$

ν = poisson ratio

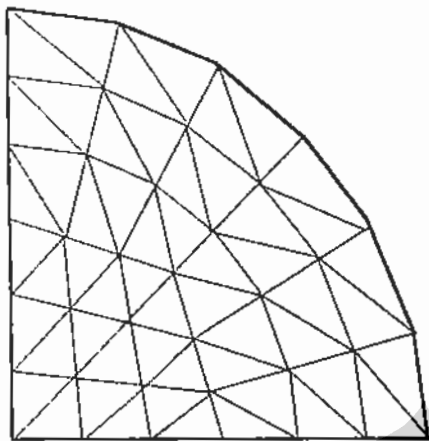
$$\xi = \frac{r}{R} \quad (0 \leq r \leq R)$$



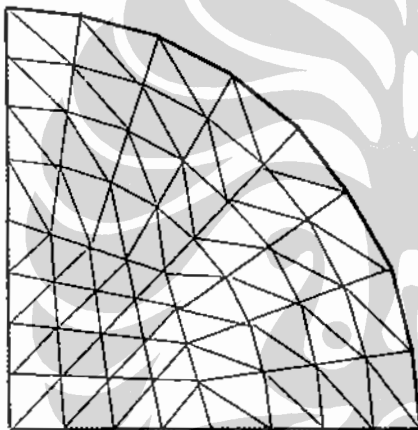
a) NELT = 6



b) NELT = 24



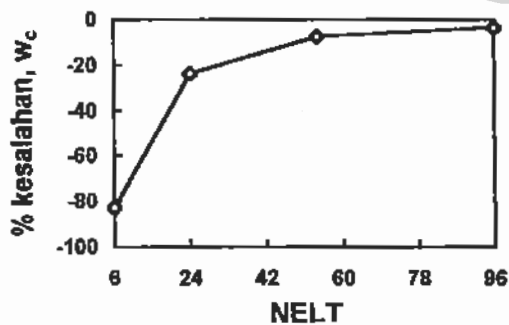
c) NELT = 54



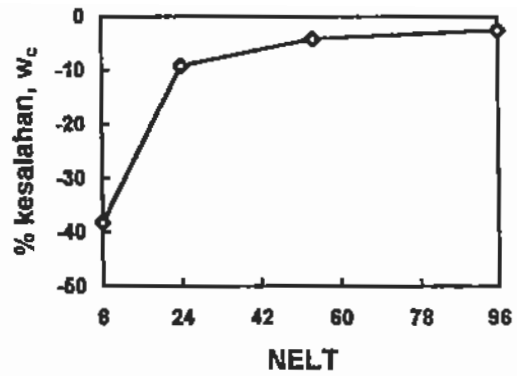
d) NELT = 96

NELT = jumlah elemen

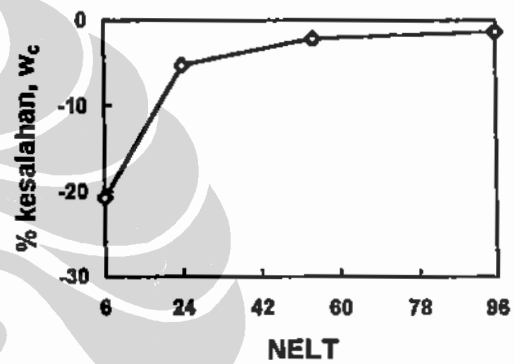
Gambar 6 Pelat lingkaran dengan jumlah elemen NELT = 6, 24, 54 dan 96



a) $R/h = 50$

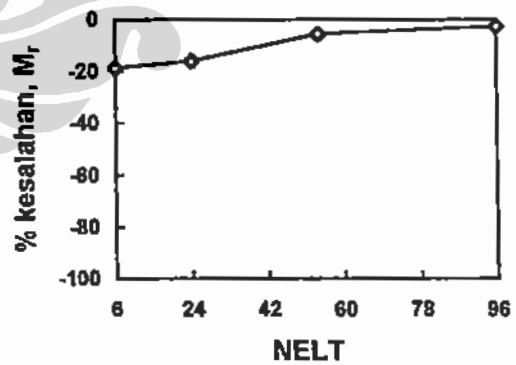


b) $R/h = 5$

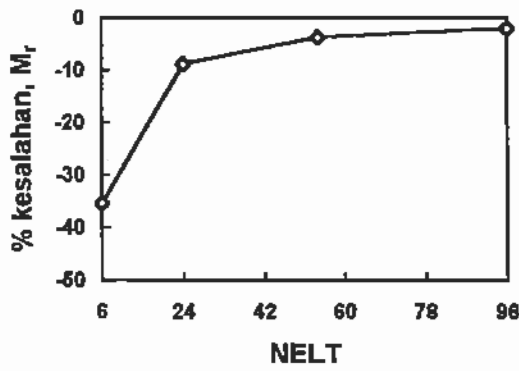


c) $R/h = 2$

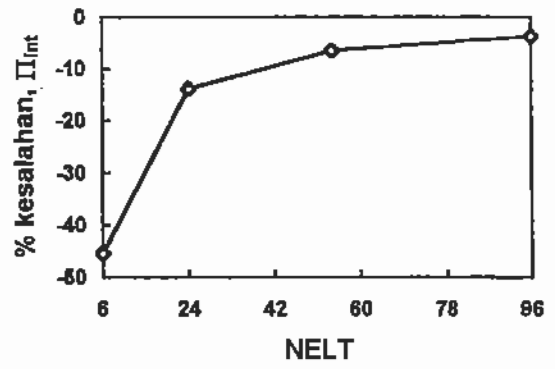
Gambar 7 Konvergensi peralihan w di pusat pelat lingkaran perletakan jepit



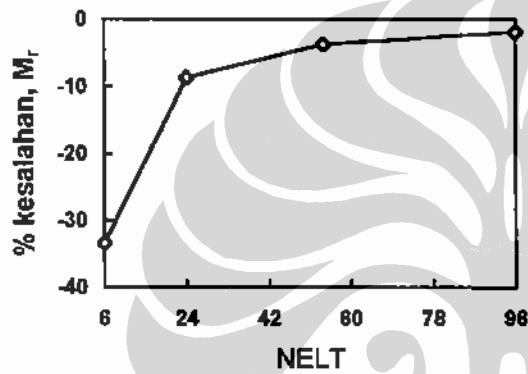
a) $R/h = 50$



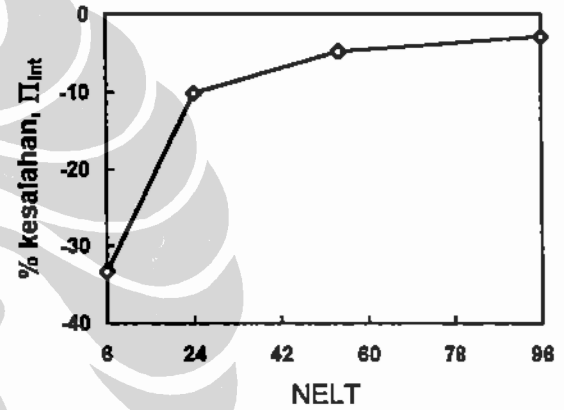
b) $R/h=5$



b) $R/h=5$



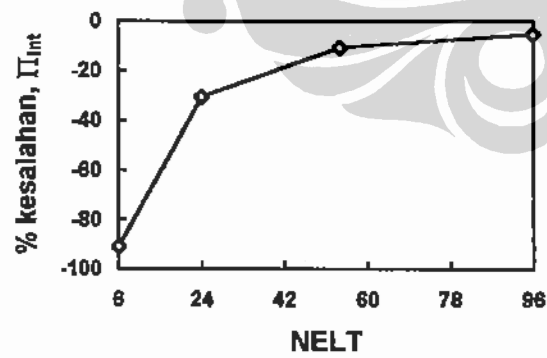
c) $R/h=2$



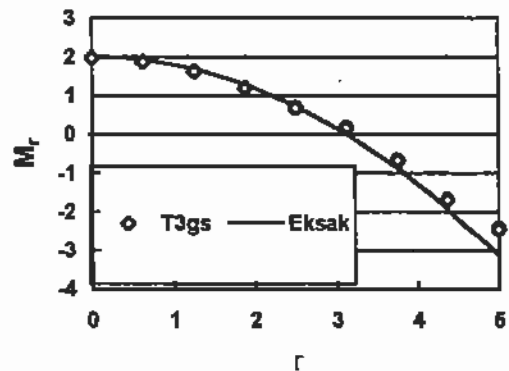
c) $R/h=2$

Gambar 8 Konvergensi momen M_r di pusat pelat lingkaran perletakan jepit

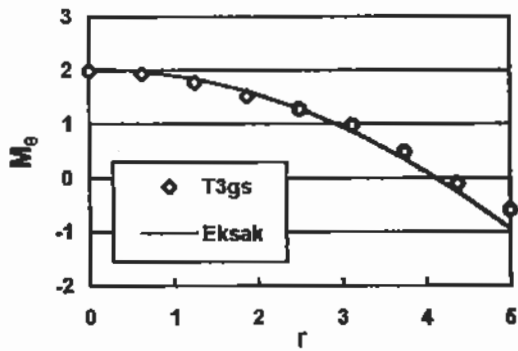
Gambar 9 Konvergensi energi internal Π_{int} pelat lingkaran perletakan jepit



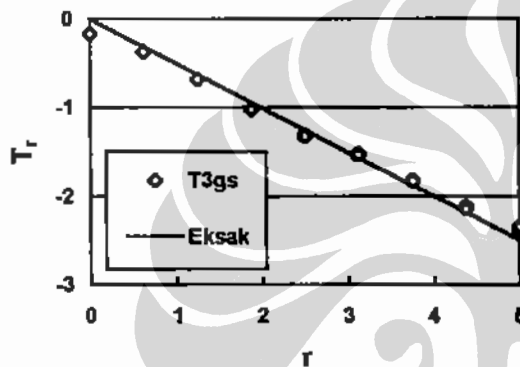
a) $R/h=50$



a) Distribusi M_r

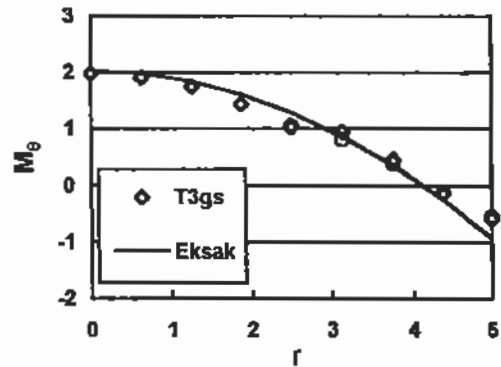


b) Distribusi M_θ

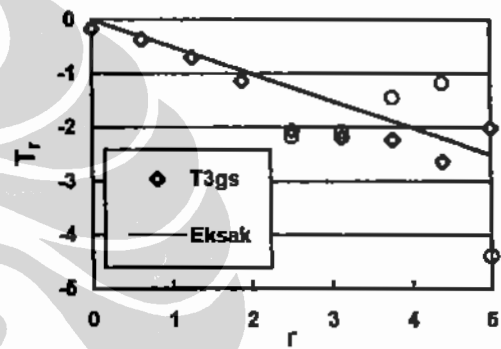


c) Distribusi T_r

Gambar 10 Distribusi gaya dalam pada arah radial (CB) pelat lingkaran, $R/h = 5$

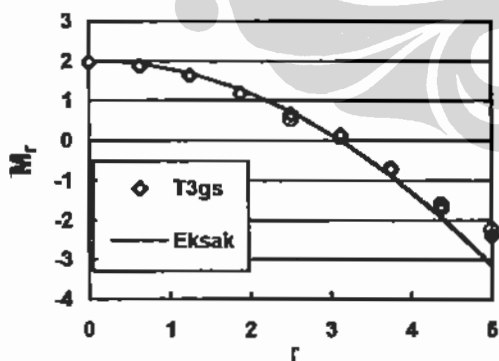


b) Distribusi M_θ



c) Distribusi T_r

Gambar 11 Distribusi gaya dalam pada arah radial (CB) pelat lingkaran, $R/h = 50$



a) Distribusi M_r

9. KESIMPULAN

Pada penulisan ini telah dibahas dan dievaluasi elemen pelat lentur triangular $T3\gamma_s$ yang memiliki 3 nodal dengan 3 derajat kebebasan permodal. Dari hasil pengujian numerik yang telah dilakukan, dapat diambil beberapa kesimpulan yang berkaitan dengan karakteristik elemen, yaitu:

- Pada test nilai eigen, diketahui bahwa elemen ini menghasilkan 1 buah pola parasit (*spurious zero-energy modes*). Tetapi pada uji dengan menggunakan 2 buah elemen memberikan hasil yang

stabil dan tidak terdapat pola parasit. Jadi elemen ini cukup stabil digunakan dan bebas pola parasit bila digunakan lebih dari satu elemen.

- Penerapan integrasi tereduksi dalam mengevaluasi matriks kekakuan elemen tidak sepenuhnya berhasil menghilangkan efek shear locking bahkan sebaliknya menimbulkan efek lain yaitu sebuah SZEM.
- Elemen $T3\gamma_s$ bebas dari pengaruh orientasi elemen, jadi elemen $T3\gamma_s$ bersifat *geometrically invariant*.
- Elemen $T3\gamma_s$ lulus semua patch test. Hal ini menunjukkan bahwa elemen ini mampu memberikan hasil-hasil perhitungan yang konvergen walaupun relatif lambat dibandingkan elemen sejenis yang lainnya seperti elemen DKMT^[5-6] dan DST-BK^[7-8].

10. DAFTAR PUSTAKA

- [1] MAC NEAL, R.H., *Derivation of element stiffness matrices by assumed strain distributions*, Nuclear Engineering and Design, Vol. 70, p. 3-12, 1982.
- [2] HUGHES, T.J.R., TAYLOR R.L., "The Linear Triangle Bending Elements". In The Mathematics of Finite Element and Application IV, MAFELAP 1981, hal. 127-142. London : Academic Press, 1982.
- [3] SZILARD, R., *Theory and analysis of plates : classical and numerical methods*, Prentice-Hall, 1974.
- [4] BATOZ, J.L., DHATT, G., *Modelisation des structures par element finis, Volume 2 : Poutres et plaques*, Hermes, Paris 1990.
- [5] KATILI, I., "A New Discrete Kirchhoff-Mindlin Element Based on Mindlin-Reissner Plate Theory and Assumed Shear Strain Fields-Part I: An Extended DKT Element for Thick-Plate Bending Analysis". IJNME, vol 36, hal. 1859-1883 , John Wiley & Sons, 1993.
- [6] KATILI, I., SAMOSIR, T.D.S., *Evaluasi dinamik getaran bebas elemen DKMT 9 d.o.f. pada pelat lentur*, Prosiding seminar metode elemen hingga, Bandung 19-20 Desember, 1996.
- [7] KATILI, I., *Formulation et evaluation des nouveaux elements finis pour l'analyse lineaire des plaques et coques de forme quelconque*, These Doctorat, U.T.C, 1993.
- [8] BATOZ, J.L., KATILI, I., "On A Simple Triangular Reissner/Mindlin Plate Element Based on Incompatible Modes and Discrete constraints". International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 35, hal. 1603-1632, France: John Wiley & Sons, 1992.