

Elemen Solid Hexa8 dan Estimasi Kesalahan

Irwan Katili dan Paulus

Jurusan Sipil, Fakultas Teknik Universitas Indonesia,

Kampus UI, Depok 16424 Tel. 7270028, 7270029

E-mail : katili@eng.ui.ac.id

Abstrak

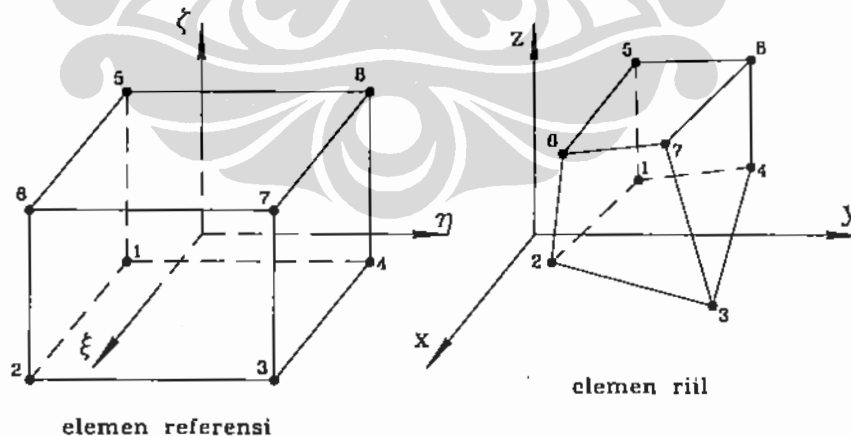
Ada berbagai macam elemen untuk struktur solid, salah satunya adalah elemen solid Hexahedron 8 nodal atau solid Hexa8. Pembentukan matriks kekakuan, matriks massa, dan estimasi kesalahan yang dipergunakan untuk elemen ini akan diperlihatkan, demikian pula kinerja elemen hexa8 dalam menyelesaikan struktur solid 3 dimensi, diantaranya pengaruh-pengaruh singularitas akibat beban dan struktur yang ada. Elemen ini mampu mengestimasi kesalahan perhitungan dengan metode Z^2 dan telah diimplementasikan dalam UI-FEAP (Universitas Indonesia – Finite Element Analysis Program).

Kata kunci : metode elemen hingga, estimator kesalahan, struktur solid 3D, hexa8

Abstract

There are many kinds of element that can be used for solid structure, one of which is solid element 8-node Hexahedron or solid Hexa8. The formulation of stiffness matrix and mass matrix, and the error estimation used for this element will be shown, in addition to the element performance in solving problems of 3 dimension solid structure such as the effects of singularity due to the existing load and structure. This element is capable of estimating calculation error using Z^2 method and has been implemented in the UI-FEAP (University of Indonesia – Finite Element Analysis Program).

Key words: finite element method, error estimation, 3D solid structure, Hexa8



Gambar 1 Elemen 3D Hexahedron regangan konstan.

1. Umum

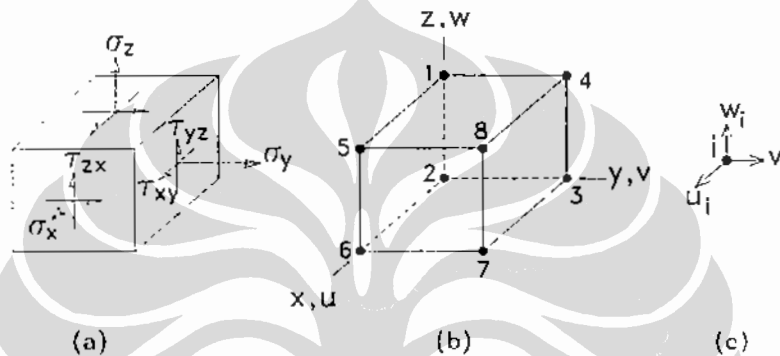
Istilah "solid 3D" dimaksudkan untuk solid tiga dimensi yang tidak dibatasi

menurut bentuk, beban, sifat material, dan kondisi batas. Konsekuensi dari semua ini adalah ada enam kemungkinan tegangan (tiga normal dan tiga geser) yang harus

diperhitungkan (Gambar. 2). Selain itu, medan peralihannya juga memiliki tiga komponen, yaitu u, v , dan w yang masing-masing dalam arah x, y , dan z . Elemen hingga tipikal untuk solid 3D adalah tetrahedron dan hexahedron, dengan tiga derajat kebebasan translasi per nodal.

Masalah lentur balok, tegangan bidang, pelat, dan sebagainya merupakan kasus khusus dari solid 3D. Mengapa tidak mempermudah analisa elemen hingga dengan menggunakan elemen 3D untuk

memodelkannya? Dalam kenyataannya, hal ini bukanlah merupakan penyederhanaan. Model 3D merupakan model yang paling sulit dipersiapkan dan diperiksa kesalahannya, dan paling menuntut kemampuan komputer yang tinggi. Selain itu, elemen 3D menjadi agak panjang dalam memodelkan balok, pelat dan cangkang; hal ini mengundang terjadinya *locking behavior* dan *ill-conditioning* [1].



Gambar 2 (a) kondisi 3D dari tegangan (b) elemen hingga hexahedron dengan 8 nodal (c) derajat kebebasan pada nodal tipikal ($i = 1, 2, \dots, 8$)

Elemen solid tiga dimensi merupakan penggambaran yang menyatakan bahwa elemen tersebut merupakan elemen tiga dimensi dengan perpindahan nodal elemen secara tiga dimensi. Pertemuan tiap elemen yang disebut nodal mempunyai tiga derajat kebebasan translasi.

Karena bentuk elemennya berupa elemen 3D, maka akan dianalisa apakah elemen ini dapat memodelisasi problem 1D dan 2D dengan baik. Dalam bentuk yang 3D ini, maka formulasi yang dilakukan tentu lebih kompleks. Karena kompleksnya, bisa saja mengalami kesukaran dalam menggambarkan analisa untuk masalah 1D maupun 2D.

Ada berbagai macam bentuk elemen 3D yang tidak umum dan yang umum, seperti berikut ini [2]:

Elemen Tetrahedron, yang terdiri dari :

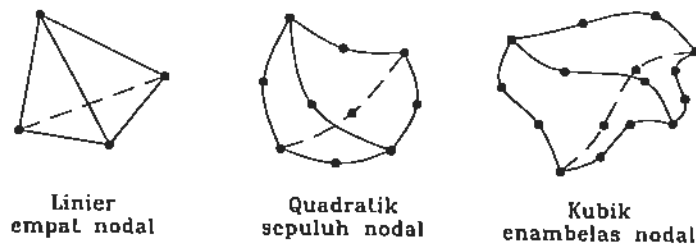
- Linier empat nodal (regangan konstan)
- Kuadratik sepuluh nodal (regangan linier)
- Kubik enambelas nodal (regangan kuadrat)

Elemen Hexahedron.

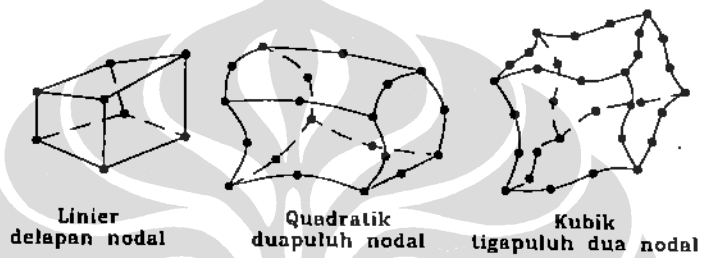
- Linier delapan nodal (regangan konstan)
- Kuadratik duapuluh nodal (regangan trilinear)
- Kubik tigapuluh dua nodal (regangan kuadrat)

Elemen Prisma

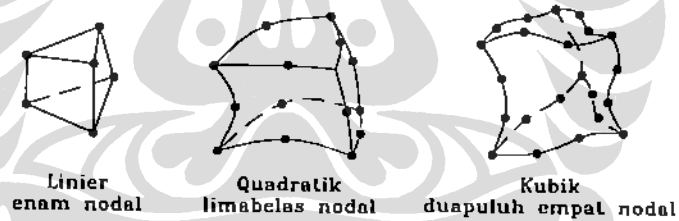
- Linier enam nodal
- Kuadratik limabelas nodal
- Kubik duapuluh empat nodal



Gambar 3 Elemen 3D Tetrahedron.

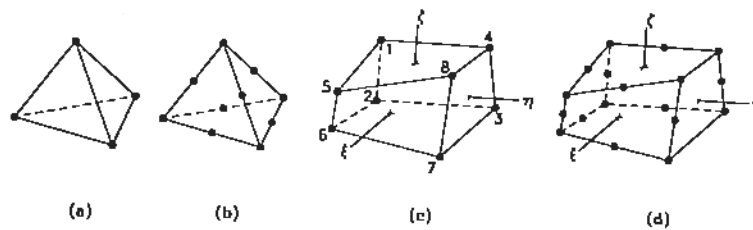


Gambar 4 Elemen 3D Hexahedron.



Gambar 5 Elemen 3D Prisma.

bentuk umum digunakan untuk elemen 3D [3], [4] adalah seperti berikut :



Gambar 6 Elemen 3D yang umum. (a) Tetrahedron regangan konstan (4 nodal). (b) Tetrahedron regangan linier (10 nodal). (c) Hexahedron trilinear (8 nodal). (d) Hexahedron kuadratik (20 nodal).

2. Aproksimasi Geometri Elemen Hexa8.

Fungsi peralihan elemen solid Hexa8 [5] adalah sebagai berikut :

$$u = \sum_{i=1}^8 N_i u_i \quad v = \sum_{i=1}^8 N_i v_i \quad w = \sum_{i=1}^8 N_i w_i \quad (1)$$

fungsi bentuk N_i dapat dilihat pada Tabel 1.

Keenam muka elemen didefinisikan oleh $\xi = \pm 1$, $\eta = \pm 1$, dan $\zeta = \pm 1$.

3. Relasi matriks Jacobian Elemen Hexahedron 8 nodal.

Diferensiasi suatu fungsi sembarang ϕ terhadap sistem koordinat kartesian x, y, z dan terhadap sistem koordinat natural ξ, η, ζ dinyatakan dalam sistem relasi matriks jacobian [2], [6] sebagai berikut:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

dimana :

$$[J] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^8 N_{i,\xi} x_i & \sum_{i=1}^8 N_{i,\xi} y_i & \sum_{i=1}^8 N_{i,\xi} z_i \\ \sum_{i=1}^8 N_{i,\eta} x_i & \sum_{i=1}^8 N_{i,\eta} y_i & \sum_{i=1}^8 N_{i,\eta} z_i \\ \sum_{i=1}^8 N_{i,\zeta} x_i & \sum_{i=1}^8 N_{i,\zeta} y_i & \sum_{i=1}^8 N_{i,\zeta} z_i \end{bmatrix}$$

Persamaan di atas juga berlaku untuk fungsi perpindahan u, v dan w .

Relasi invers persamaan di atas adalah :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} \quad \phi = u, v, w \quad (4)$$

Tabel 1. Tabel fungsi bentuk Hexa8.

Nodal	N_i
1	$\frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)$
2	$\frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta)$
3	$\frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta)$
4	$\frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta)$
5	$\frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta)$
6	$\frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta)$
7	$\frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta)$
8	$\frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta)$

Tabel 2. Tabel fungsi turunan Hexa8.

$N_{i,\xi}$	$N_{i,\eta}$
$-\frac{1}{8}(1-\eta)(1-\zeta)$	$-\frac{1}{8}(1-\xi)(1-\zeta)$
$\frac{1}{8}(1-\eta)(1-\zeta)$	$-\frac{1}{8}(1+\xi)(1-\zeta)$
$\frac{1}{8}(1+\eta)(1-\zeta)$	$\frac{1}{8}(1+\xi)(1-\zeta)$
$-\frac{1}{8}(1+\eta)(1-\zeta)$	$\frac{1}{8}(1-\xi)(1-\zeta)$
$-\frac{1}{8}(1-\eta)(1+\zeta)$	$-\frac{1}{8}(1-\xi)(1+\zeta)$
$\frac{1}{8}(1-\eta)(1+\zeta)$	$-\frac{1}{8}(1+\xi)(1+\zeta)$
$\frac{1}{8}(1+\eta)(1+\zeta)$	$\frac{1}{8}(1+\xi)(1+\zeta)$
$-\frac{1}{8}(1+\eta)(1+\zeta)$	$\frac{1}{8}(1-\xi)(1+\zeta)$

$N_{i,\zeta}$
$\frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)$
$\frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)$
$\frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)$
$\frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)$
$-\frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)$
$-\frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)$
$-\frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)$
$-\frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)$

Deformasi solid 3D untuk kasus linier dan peralihan kecil dalam sistim kartesian dinyatakan [7] oleh :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ w_{,z} \\ u_{,y} + v_{,x} \\ v_{,z} + w_{,y} \\ u_{,z} + w_{,x} \end{Bmatrix}_{6 \times 1} \quad (5)$$

$$\{\varepsilon\} = [B]\{u_n\} \quad (6)$$

dimana :

$$\langle \varepsilon \rangle = \langle \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx} \rangle \quad (7)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 \\ 0 & 0 & N_{1,z} \\ \dots & \dots & \dots \\ N_{1,y} & N_{1,x} & 0 \\ 0 & N_{1,z} & N_{1,y} \\ N_{1,z} & 0 & N_{1,x} \end{bmatrix}_{6 \times 24} \quad \dots i=1,8 \quad (8)$$

$$N_{1,x} = j_{11}N_{1,\xi} + j_{12}N_{1,\eta} + j_{13}N_{1,\zeta}$$

$$N_{1,y} = j_{21}N_{1,\xi} + j_{22}N_{1,\eta} + j_{23}N_{1,\zeta}$$

$$N_{1,z} = j_{31}N_{1,\xi} + j_{32}N_{1,\eta} + j_{33}N_{1,\zeta}$$

$$\langle u_n \rangle = \langle \dots u_i \quad v_i \quad w_i \quad \dots \quad i=1,8 \rangle$$

Ekspresi umum Prinsip Kerja Virtual untuk masalah elastis 3D adalah :

$$W = \sum_c W^c = 0 \quad \forall \quad \underline{u}^* \quad (9)$$

dengan

$$W^c = \int_{V^c} \langle \varepsilon^* \rangle [H] \{\varepsilon\} dV - \int_{V^c} \langle u^* \rangle [f_v] dV + \int_{V^c} \langle \varepsilon^* \rangle [\sigma_o] dV - \int_{S_f} \langle u^* \rangle [f_s] dS \quad (10)$$

Dimana seperti biasanya, hubungan konstitutif dari sebuah material elastis linier [8] ditulis sebagai

$$\{\sigma\} = [H]\{\varepsilon\} \quad (11)$$

Untuk sebuah material isotropis dalam tiga dimensi, dengan

$$[H] = \begin{bmatrix} (1-\nu)c & \nu c & \nu c & 0 & 0 & 0 \\ & (1-\nu)c & \nu c & 0 & 0 & 0 \\ & & (1-\nu)c & 0 & 0 & 0 \\ & & & G & 0 & 0 \\ \text{simetri} & & & & G & 0 \\ & & & & & G \end{bmatrix} \quad (12)$$

Di mana E adalah modulus elastisitas, ν adalah Poisson's ratio, dan

$$c = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{dan} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Gaya pada $\{f_v\}$ meliputi juga gaya redaman, gaya inersia dan beban (statik dan/atau dinamik).

$$\{f_v\} = \{f_v(t)\} - \rho\{\ddot{u}\} - C_r\{\dot{u}\} \quad (13)$$

dimana ρ adalah massa jenis dan C_r adalah koefisien redaman (dengan asumsi bahwa gaya redaman adalah fungsi linier dari kecepatan). $\{\sigma_o\}$ menyatakan tegangan inisial atau tegangan akibat temperatur.

Persamaan (9) dengan (10) memberikan :

$$W^c = W_{int}^c - W_{ext}^c \quad (14)$$

$$W_{int}^c = \int_{V^c} \langle \varepsilon^* \rangle [H] \{\varepsilon\} dV + \int_{V^c} \langle \varepsilon^* \rangle [\sigma_o] dV \quad (15)$$

$$W_{ext}^c = \int_{V^c} \langle u^* \rangle \{f_v(t)\} dV + \int_{S_f} \langle u^* \rangle \{f_s(t)\} dS - \int_{V^c} \rho \langle u^* \rangle \{\ddot{u}\} dV - \int_{V^c} C_r \langle u^* \rangle \{\dot{u}\} dV \quad (16)$$

dan menggabungkan (7) dan (8) ke dalam persamaan (14) kita peroleh :

$$W_{int}^c = \langle u_n^* \rangle ([k]\{u_n\} - \{f_\sigma\}) \quad (17)$$

$$W_{\text{en}}^e = \langle u_n^* \rangle (\{f_n\} - [c]\{\dot{u}_n\} - [m]\{\ddot{u}_n\}) \quad (18)$$

dengan

$$[k] = \int_{V''} [B]^T [H] [B] dV \quad (19)$$

$$[c] = \int_{V''} c_r [N]^T [N] dV \quad (20)$$

$$[m] = \int_{V''} \rho [N]^T [N] dV \quad (21)$$

$$\{f_n\} = \int_{V''} [N]^T \{f_v\} dV + \int_{S_j} [N]^T \{f_s\} dS \quad (22)$$

$[k]$ matriks kekakuan elemen

$[c]$ matriks redaman elemen

$[m]$ matriks massa elemen

$\{f_n\}$ vektor gaya (ekivalen) elemen akibat beban volume dan permukaan

$\{f_v\}$ vektor gaya elemen akibat beban volume

$\{f_s\}$ vektor gaya elemen akibat beban permukaan

Dalam ekspansi integrasi numerik kekakuan elemen menjadi :

$$[k] \equiv \sum_{i=1}^{NPI} [B(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)]^T [H] [B(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)] |J(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)| \omega_i \quad (23)$$

Tabel integrasi Gauss [9] untuk elemen Hexahedron 8 nodal, adalah sebagai berikut:

Tabel 3. Tabel integrasi Gauss untuk elemen Hexah8.

Titik integrasi	Koordinat natural			Bobot
	ξ_i	η_i	ζ_i	
1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
2	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
3	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
4	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
5	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1

6	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
7	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
8	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1

3. Matriks Massa Elemen Hexa8.

Arti fisik dari matriks massa analog dengan arti fisik dari matriks kekakuan. Kolom ke j dari suatu elemen matriks kekakuan adalah vektor beban nodal yang harus diberikan pada elemen untuk membuat satu unit perpindahan pada derajat kebebasan ke j sedangkan derajat kebebasan lainnya nol. Sedangkan kolom ke j dari matriks massa adalah vektor beban nodal yang harus diberikan pada elemen untuk membuat satu unit percepatan dari turunan kedua derajat kebebasan ke j sedangkan percepatan lainnya nol.

3.1. Matriks Massa Tergumpal Elemen Hexa8.

Metode yang paling sederhana untuk membentuk matriks massa ialah dengan menggunakan matriks massa diagonal yaitu matriks massa terkumpul (Lump Mass Matrix). Dalam pemrograman dengan komputer, metode ini memiliki keuntungan-keuntungan antara lain lebih sederhana dalam pembentukannya, memerlukan memori yang lebih kecil dan iterasi atau looping yang lebih cepat sehingga dapat menghemat waktu operasi.

Matriks massa terkumpul (Lump Mass) yang dibuat dengan metode Row Sum dibentuk dengan prosedur yang lebih sederhana, yaitu dengan mendistribusikan massa elemen solid pada titik-titik nodal.

Secara umum rumus matriks massa tergumpal untuk elemen solid dinyatakan dengan persamaan berikut :

$$[m_{lump}] = \int_V \rho \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ & N_i & & \\ & & N_i & \\ & & & N_i \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} dV \quad i=1,8 \quad (24)$$

Untuk dapat menyelesaikan persamaan integrasi dari fungsi yang mempunyai tiga variabel secara numerik, digunakan cara pendekatan integrasi numerik. Untuk elemen solid Hexahedron integrasi Gauss dengan rumus umum sebagai berikut :

$$[m_{lump}] = \rho \sum_{i=1}^{NPI} [L N_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) L] [J(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)] \omega_i \quad (25)$$

dimana :

ρ = massa jenis bahan

N_i = fungsi bentuk (shape function)

Dengan perumusan matriks massa tergumpal (25) dan fungsi bentuk seperti tersebut di atas maka orde polinomial tertinggi dari persamaan matriks massa tergumpal adalah $\xi \eta \zeta$ sehingga nilai $p = 3$ dan jumlah titik gauss (n) menjadi :

$$n = \frac{p+1}{2} = 2$$

p = pangkat tertinggi dari fungsi polinomial yang akan diintegrasikan.

Dengan demikian digunakan integrasi Gauss $2 \times 2 \times 2$ dan koordinat Gauss lihat tabel 3.

3.2. Matriks Massa elemen Hexa8.

Model matriks massa yang lainnya adalah matriks massa konsisten (*Consistent Mass Matrix*). Matriks massa ini disebut matriks massa konsisten karena secara konsisten tetap mempergunakan faktor-faktor bentuk yang digunakan pada matriks kekakuan. Matriks $[N]$ yang membentuk matriks massa tersebut menghubungkan peralihan solid u, v, w dengan 24 vektor peralihan elemen $\{u_n\}$.

Persamaan matriks massa konsisten dalam bentuk umum [10] adalah :

$$[m] = \int_{V'} \rho [N]^T [N] dV' \quad (26)$$

atau

$$[m] = \int_{V'} \rho [N(\xi, \eta, \zeta)]^T [N(\xi, \eta, \zeta)] \det |J(\xi, \eta, \zeta)| dV' \\ = \int_{V'} [m_\xi] dV' \quad (27)$$

dan bentuk matriks massa konsisten dalam integrasi numerik, yaitu

$$[m] = \sum_{i=1}^{NPI} \omega_i [m_\xi(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)] \quad (28)$$

Dengan jumlah titik integrasi yang dipergunakan untuk matriks massa konsisten sama seperti jumlah titik integrasi untuk matriks kekakuan elemen.

4. Estimasi Kesalahan

Estimator kesalahan dapat ditulis dalam bentuk umum sebagai norma kesalahan. Sedangkan norma kesalahan yang dipakai berbentuk kesalahan terhadap norma energi. Untuk suatu elemen i , *error norma energi* tersebut dapat ditulis;

$$\|e\|_i = \|u_\sigma - u\|_i \quad (29)$$

atau

$$\|e\|_i^2 = \int_V \langle e \rangle_\sigma \{e\}_\sigma dV \quad (30)$$

dimana,

$$\{e\}_\sigma = \{\sigma_\sigma\} - \{\sigma\} \quad (31)$$

Sedangkan $\{\sigma_\sigma\}$ adalah tegangan secara eksak, sedangkan $\{\sigma\}$ adalah hasil perhitungan metode elemen hingga pada setiap elemen.

Dengan demikian persamaan (30) dapat ditulis sebagai;

$$\|e\|_i^2 = \int_V (\langle \sigma_\sigma \rangle - \langle \sigma \rangle) [H]^{-1} (\{\sigma_\sigma\} - \{\sigma\}) dV \quad (32)$$

Untuk mengevaluasi norma tersebut untuk seluruh domain struktur dapat

dilakukan dengan menjumlahkan kontribusi norma kesalahan dari tiap elemen, seperti;

$$\|e\|^2 = \sum_{i=1}^m \|e_i\|^2 \quad (33)$$

dimana m menunjukkan jumlah total elemen pada struktur.

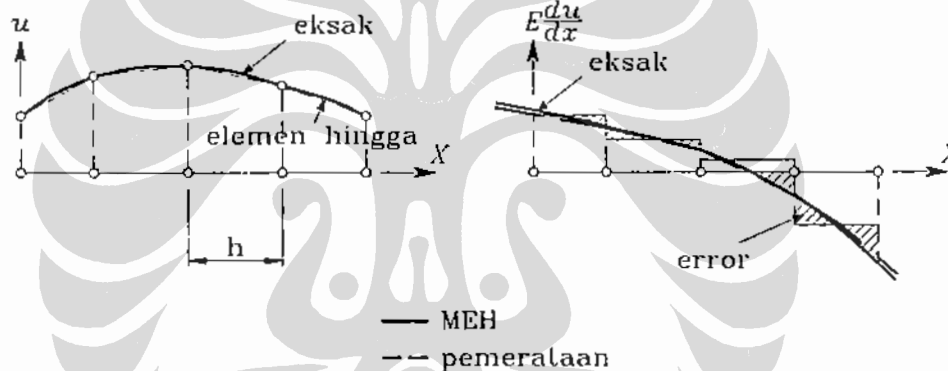
Dalam perhitungan kesalahan norma energi, solusi eksak jelas tidak selalu tersedia dalam perhitungan praktis, untuk itu di dalam mengestimasi kesalahan, kita mencari metode praktis untuk mengatasi masalah ini. Zienkiewicz dan Zhu [11], [12], [13] mengevaluasi kesalahan seperti pada persamaan (29), tetapi dengan mengganti solusi eksak dengan suatu fungsi pendekatan lain. Sebagaimana yang diketahui pada bagian terdahulu, fungsi

pendekatan dapat diperoleh melalui suatu metoda pemulihan tegangan dan dalam hal membangun estimator kesalahan Z^2 ini metode pemulihan tegangan yang dipilih adalah pemerataan tegangan pada pertemuan nodal antar elemen. Dengan demikian persamaan (29) dapat ditulis;

$$\|\bar{e}\|_e = \|\bar{u} - u\|, \quad (34)$$

$$\|\bar{e}\|_e^2 = \int_V (\langle \bar{\sigma} \rangle - \langle \sigma \rangle) [H]^{-1} (\langle \bar{\sigma} \rangle - \langle \sigma \rangle) dV \quad (35)$$

Teknik pemerataan tegangan ini memberikan pendekatan yang baik terhadap solusi eksak dan dapat dilihat pada Gambar 2.



Gambar 7 Perbandingan antara solusi elemen hingga, solusi eksak, dan hasil pemerataan tegangan

Tegangan $\{\bar{\sigma}\}$ merupakan fungsi tegangan yang diperoleh dengan melakukan interpolasi terhadap hasil pemerataan nodal. Dengan demikian tegangan ini merupakan suatu fungsi aproksimasi bentuk baru terhadap derivatif peralihan dan memiliki orde polinomial satu derajat lebih tinggi.

Jika pemerataan tegangan σ_x pada nodal i adalah, $\bar{\sigma}_x$, maka fungsi tegangan $\bar{\sigma}_x$ dapat diinterpolasikan dari besar tegangan nodal, $\{\bar{\sigma}_x\}$ memakai fungsi bentuk elemen $\langle N \rangle$, maka dapat ditulis;

$$\bar{\sigma}_x = \langle N \rangle \{ \bar{\sigma}_x \} \quad (36)$$

dalam hal ini,

$\bar{\sigma}_x$ = fungsi pemerataan tegangan pada elemen

$\langle N \rangle$ = fungsi bentuk elemen

$\{\bar{\sigma}_x\}$ = tegangan hasil pemerataan pada nodal

Kita dapat mengatakan estimator kesalahan akan mendekati kesalahan aktual jika jumlah elemen diperbanyak yang berarti memperluas domain penyelesaian persamaan struktur.

$$\|\bar{e}\|_e^2 \approx \|e\|_e^2 \quad (37)$$

$$\|\bar{e}\|_e^2 = \sum_{i=1}^m \|e_i\|_e^2 \quad (38)$$

Estimasi kesalahan di atas disebut estimasi *a posteriori* yang berarti suatu estimasi kesalahan yang dapat diketahui atau dihitung dengan menghitung jawab elemen hingga terlebih dahulu. Kualitas estimator kesalahan, dapat dihitung melalui *indeks efektivitas* yang merupakan rasio estimator kesalahan dan kesalahan eksak yang telah dibahas oleh Nagesh Iyer dan Appa Rao [14], [15].

$$\theta = \frac{\|\bar{e}\|}{\|e\|} \quad (39)$$

di mana $\|\bar{e}\|$ merupakan estimator kesalahan, sedangkan $\|e\|$ adalah kesalahan aktual. Indeks efektivitas ini hanya dapat dihitung bila jawab eksak tersedia.

Estimator kesalahan yang terbentuk dapat dikatakan asimtotis eksak bila indeks efektivitas konvergen menuju nilai 1, sedangkan kesalahan aktual menjadi nol. Estimator kesalahan akan cenderung menjadi nol terlebih dahulu sebelum kesalahan eksak mencapainya. Estimator kesalahan hanya mungkin menjadi kesalahan aktual (eksak) jika ukuran elemen diperkecil menjadi sangat kecil mencapai nol dan dalam hal ini membuat jumlah elemen menjadi tak terhingga. Bagaimanapun secara praktis, ukuran elemen tidak mungkin dibuat mendekati nol yang berarti menyebabkan perhitungan menjadi tidak henti-hentinya. Untuk itu perlu dibuat suatu estimator kesalahan yang efektif pada batas tertentu khususnya bila estimator kesalahan tersebut dipakai sebagai penentu kriteria penghentian diskritisasi struktur. Untuk itu perlu dibuat suatu batasan dengan menghitung *error relative*, α dalam persen. Secara eksak kesalahan relatif didefinisikan sebagai;

$$\alpha = \frac{\|e\|}{\|u\|} \quad (40)$$

di mana $\|e\|$ adalah kesalahan eksak secara global sesuai persamaan (39), sedangkan $\|u\|^2$ adalah energi regangan eksak struktur secara global yang melibatkan energi tegangan.

$$\|u\|_i^2 = \int_V \langle \sigma \rangle [H]^{-1} \langle \sigma \rangle dV \quad (41)$$

$$\|u\|^2 = \sum_{i=1}^m \|u\|_i^2 \quad (42)$$

Dalam estimator kesalahan, kesalahan relatif pada persamaan (39) digantikan dengan *kesalahan relatif estimasi* (*estimated relative error*), $\bar{\alpha}$ dan ditulis;

$$\bar{\alpha} = \frac{\|\bar{e}\|}{\|u\|} \quad (43)$$

Pada persamaan (43) nilai $\|\bar{e}\|$ sesuai dengan persamaan (36), sedangkan $\|u\|^2$ adalah dua kali energi regangan struktur untuk tegangan yang diperoleh melalui metode elemen hingga (pendekatan) dan dapat diekspresikan berbentuk;

$$\|u\|_i^2 = \int_V \langle \sigma \rangle [H]^{-1} \langle \sigma \rangle dV \quad (44)$$

$$\|u\|^2 = \sum_{i=1}^m \|u\|_i^2 \quad (45)$$

Batasan kesalahan relatif sebesar 5% dapat diterima untuk aplikasi teknik baik pada persamaan (39) maupun (40).

5. Strategi Diskritisasi

Dalam menganalisa kesalahan perhitungan suatu struktur melalui metoda elemen hingga, kita dituntut untuk memiliki strategi khusus untuk menemukan model matematis yang terbaik untuk struktur tersebut. Dalam hal ini teknik diskritisasi berperan penting. Ketelitian solusi metoda elemen hingga yang dinyatakan dalam norma kesalahan tergantung kepada proses diskritisasi yang kita lakukan [16]. Sesuai dengan persyaratan konvergensi, yaitu semakin kecil ukuran elemen atau semakin banyak jumlah elemen yang kita gunakan dalam modelisasi struktur, maka harus terjamin didekatinya jawab eksak. Dengan strategi diskritisasi yang benar atau penghalusan, maka kita dapat mengetahui lokasi tertentu di mana diperlukan penghalusan. Tentu saja hal ini

tidak terlepas dari bantuan estimator kesalahan yang memberikan estimasi besar kesalahan pada suatu region.

Untuk berbagai kasus-kasus kita membuat persentase kesalahan relatif tidak boleh melebihi batas *error relative* yang diijinkan α' dan boleh diambil sebesar 5%.

$$\alpha \leq \alpha' \quad (46)$$

Jika total kesalahan yang terjadi dikehendaki telah terdistribusi secara merata pada batas $\bar{\alpha}$ untuk tiap-tiap elemen, maka kita dapat memperoleh batasan kesalahan untuk tiap elemen dengan jumlah m . Penurunan batasan tersebut pada metode elemen hingga adalah sebagai berikut;

$$\|u_{ex}\| \approx \|u\|^2 \quad (47)$$

$$\|\bar{e}\|^2 = \sum_{i=1}^m \|e_i\|^2 \quad (48)$$

jika kontribusi kesalahan dari tiap elemen diasumsikan telah merata dan dinotasikan dengan $\bar{e}$, maka total kesalahan pada persamaan (48) dapat ditulis;

$$\|e'\|^2 = m \|e_i\|^2 \quad (49)$$

sedangkan kesalahan relatif yang diijinkan ditulis kembali dalam bentuk lain sebagai;

$$\alpha' = \frac{\|e'\|}{\|u\|} \quad (50)$$

$$\|e_i\| = \alpha' \frac{\|u\|}{\sqrt{m}} \quad (51)$$

Dengan tersedianya batas kesalahan untuk tiap-tiap elemen, maka dengan segera dapatlah diperiksa kapan dan dimana penghalusan (*refinement*) diperlukan. Hal ini dapat dipandu dengan melihat parameter indeks penghalusan mesh elemen i , (ϕ_i) yang didefinisikan sebagai;

$$\phi_i = \frac{\|\bar{e}\|_i}{\|e'\|_i} \quad (52)$$

Penghalusan (*refinement*) diperlukan pada suatu elemen jika indeks penghalusan mesh untuk elemen tersebut melebihi nilai

1.0, yang berarti melebihi batas izin kesalahan elemen yaitu;

$$\phi_i > 1.0 \quad (53)$$

Dengan tersedianya estimator kesalahan beserta parameter-parameter pendukungnya, khususnya indeks penghalusan elemen ϕ_i , maka bukan merupakan masalah untuk mendapatkan modelisasi yang tepat untuk suatu struktur yang sederhana dan kompleks. Penghalusan elemen hanya diperlukan pada tempat-tempat tertentu saja, sehingga melahirkan proses penghalusan secara adaptif (*adaptive refinement*). Penghalusan adaptif mempunyai keunggulan tersendiri jika dibandingkan dengan penghalusan seragam (*uniform refinement*), di mana laju konvergensi menuju solusi eksak yang didapat sangat cepat.

Penghalusan sangat berguna sebagaimana kontribusi kesalahan pada tiap elemen diketahui dan dikehendaki berada pada batas wajar.

6. Uji Numerik

6.1. Uji nilai Eigen

Tes nilai eigen diperlukan untuk mengetahui jumlah gerak benda kaku yang dimiliki suatu elemen dan juga memeriksa apakah elemen tersebut memiliki *spurious zero energy modes*.

Secara matematis *spurious zero energy modes* menyebabkan defisiensi rank dari matriks kekakuan elemen. Hal tersebut menimbulkan matriks kekakuan yang singular atau hampir singular sehingga dapat terjadi perhitungan yang tidak sesuai, jumlah gerak benda kaku yang terjadi menjadi tidak sesuai dengan ketentuan yang semestinya. Pada kasus elemen solid 3D Hexahedron 8 nodal ini jumlah gerak benda kaku, yang identik dengan jumlah nilai eigen nol, semestinya ada 6, yang terdiri dari :

- Translasi arah sumbu-x (u)
- Translasi arah sumbu-y (v)
- Translasi arah sumbu-z (w)

- Rotasi dalam bidang x-y
- Rotasi dalam bidang y-z
- Rotasi dalam bidang x-z

Secara teoritis, nilai eigen diperoleh dari persamaan :

$$\det([k] - \lambda[I]) = 0 \quad (54)$$

dimana :

$[k]$ = matriks kekakuan elemen

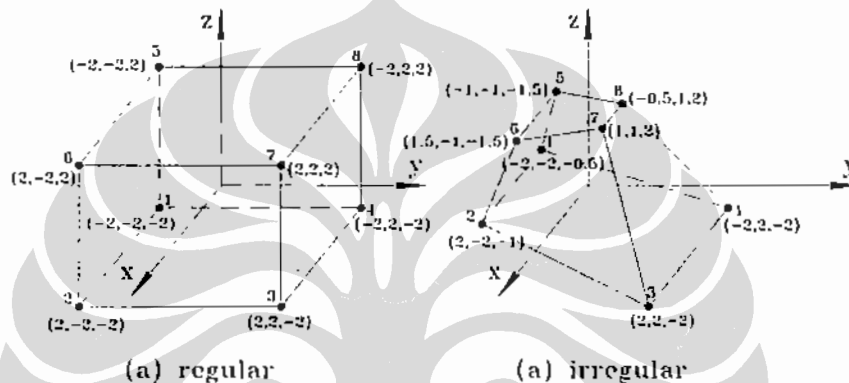
$[I]$ = matriks identitas

λ = nilai eigen

Jumlah *spurious zero modes* dihitung dari kelebihan jumlah gerak benda kaku, atau secara matematis dirumuskan sebagai :

$$\sum Rank = \sum D.O.F - \sum R.B.M \quad (55)$$

Pada elemen Solid3D Hexahedron 8 nodal, yang memiliki 8 nodal dan 24 derajat kebebasan pada setiap elemennya, jumlah matriks yang sesuai adalah $(24-6) = 18$.



Gambar 8 Elemen Tunggal Untuk Tes Nilai Eigen

Tes nilai eigen bagi elemen Solid3D Hexahedron 8 nodal dilakukan terhadap dua kondisi elemen yaitu elemen dengan bentuk regular dan irregular.

Hasil analisa nilai eigen elemen Solid3D Hexahedron 8 nodal dengan dua kondisi tersebut diperoleh 6 buah nilai eigen yang nol pada elemen Solid3D Hexa8 yang berarti bahwa elemen tersebut memiliki 6 gerak benda kaku (R.B.M) dan bebas dari fenomena zero energy modes.

6.2. Patch Test

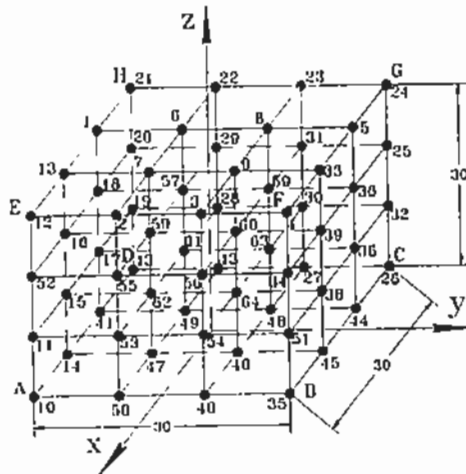
Patch test dilakukan untuk memeriksa apakah elemen yang telah diformulasikan dapat memenuhi kondisi regangan konstan dan tegangan konstan. Patch test ini terdiri dari 2 jenis yaitu Patch Test Kinematik untuk memeriksa elemen terhadap kondisi regangan konstan dan Patch Test Mekanik untuk memeriksa kondisi tegangan konstan. Elemen yang lulus dari kedua Patch Test tersebut dipastikan akan mampu mencapai

konvergensi ke arah hasil eksak apabila jumlah mesh ditingkatkan.

6.2.1. Patch Test Kinematik

Pada elemen solid terdapat 6 regangan $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$, sehingga untuk kondisi regangan konstan seluruh nodal struktur, maka diberikan perpindahan awal untuk nodal di permukaan struktur yang mengikuti rumus berikut :

$$\begin{aligned} u &= x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z \\ v &= \frac{1}{2}x + y + \frac{1}{2}z \\ w &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + z \end{aligned} \quad (56)$$

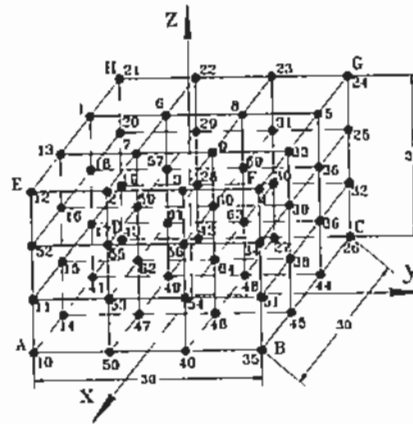


Gambar 9. bentuk struktur untuk patch test kinematis

Dengan persamaan di atas, peralihan nodal yang harus diberikan pada struktur bagian luar, yaitu sisi ABCD, EFGH, ABFE, BCGF, CDHG, DAEH. Hasil patch test kinematik adalah bahwa $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 1$ pada semua nodal dan berarti bahwa elemen Solid3D Hexahedron 8 nodal lulus patch test kinematik.

6.2.2. Patch Test Mekanik

Pada uji ini struktur solid diberikan beban merata berupa beban normal dan beban geser. Secara teoritis, setiap titik pada struktur solid akan mengalami tegangan normal dan geser yang sama. Dalam penelitian ini pembebanan pada struktur solid diberikan tegangan sebesar 1 satuan pada bagian kulit struktur.



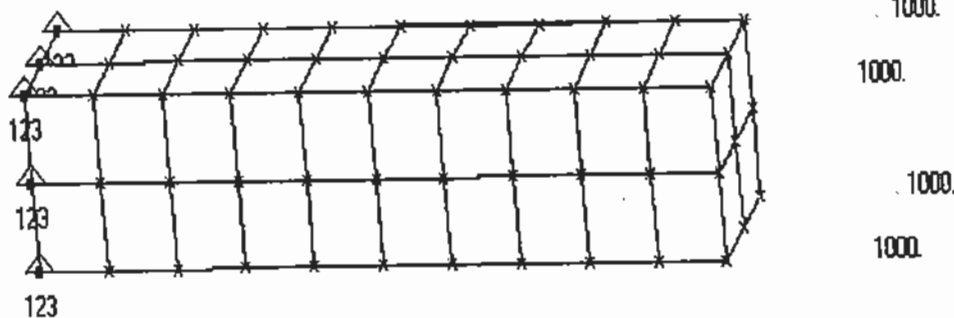
Gambar 10. Struktur untuk dilakukan patch test mekanik

Kulit struktur yang diberi tegangan 1 (satu) satuan, yaitu bidang ABCD, EFGH, ABFE, BCGF, CDHG, DAEH. untuk gaya akibat tegangan normal sebesar 1 (satu) satuan.

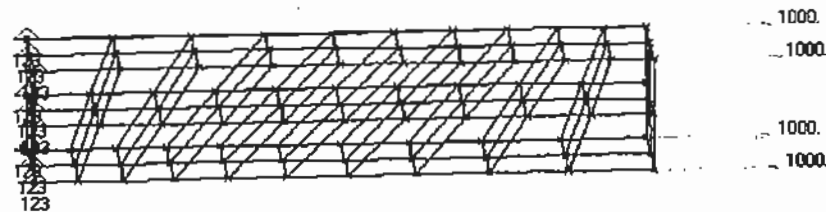
dari hasil perhitungan patch test mekanik yang menghasilkan $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 1$, maka dapat kita ambil kesimpulan, bahwa elemen solid3D hexa8 lulus patch test mekanik.

6.3. Uji Distorsi Elemen

Bentuk struktur yang akan diuji adalah struktur kantilever, dengan membandingkan hasil uji distorsi elemen dengan program ANSYS 5.4.



Gambar 11. Struktur yang diuji distorsi pada 40 elemen yang tidak terdistorsi



Gambar 12. Struktur yang diuji distorsi pada 40 elemen yang terdistorsi

data material :

$$E = 2.1 \times 10^6$$

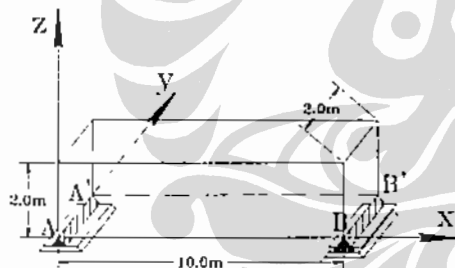
$$\nu = 0.3$$

Hasil perpindahan nodal searah gaya pada nodal ujung tempat gaya bekerja, adalah

	tak terdistorsi	terdistorsi
Hexa8	7.26E-03	7.22E-03
ANSYS5.4 40 elemen	7.32E-03	7.38E-03

elemen Hexa8 yang tidak terdistorsi lebih mendekati hasil ANSYS5.4 [17]

6.4. Uji Numerik Getaran Bebas



Gambar 13 Model balok tebal yang diuji getaran bebas

Dengan kondisi batas :

sepanjang A-A' ditahan oleh perletakan sendi

sepanjang B-B' ditahan oleh perletakan rol
semua bagian struktur ditahan dalam arah y

Properti material :

$$E = 200 \times 10^9 \text{ N/m}^2, \quad \nu = 0.3,$$

$$\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$$

Problem ini adalah salah satu uji NAFEMS [18] (National Agency Finite Element Methods and Standard) untuk kasus getaran bebas.

Hasil yang di dapat adalah :

Tabel 4. Hasil Mode dari struktur 'solid' balok

JUMLAH ELEMEN	MODE 1 (Hz)	MODE 2 (Hz)	MODE 3 (Hz)
5	49.208	107.062	183.805
40	42.407	94.536	166.493
320	39.677	85.408	154.083
ASAS (16)	38.200	85.21	152.23
ANSYS (16)	37.31	83.92	145.28
	MODE 4 (Hz)	MODE 5 (Hz)	
5	296.774	325.879	
40	274.684	315.443	
320	249.476	302.333	
ASAS (16)	245.53	297.05	
ANSYS (16)	231.14	277.91	

* elemen untuk ASAS dan ANSYS adalah elemen hexahedron 20 nodal dengan consistent mass

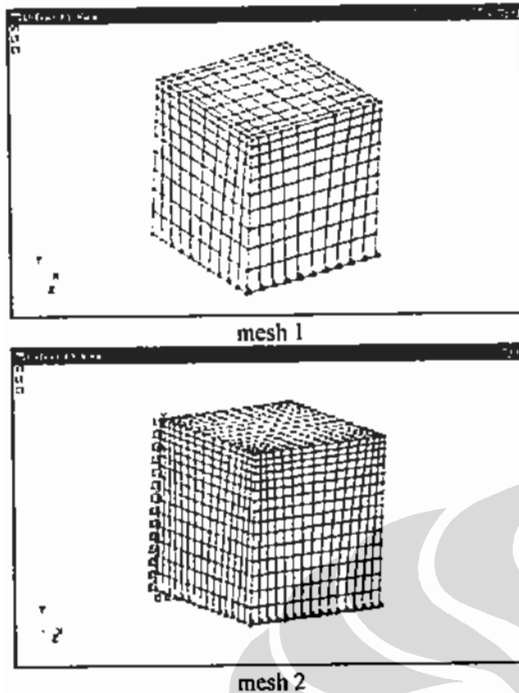
6.3. Uji Benda Kubus

Uji struktur kotak yang pada bagian bawah diberikan perletakan sendi pada semua nodal. Diberi gaya terpusat di sudut-sudut pada bagian atas kotak sebesar 1000, akan kita amati bentuk kontur ϕ .

Data material :

$$E = 2.1 \times 10^6$$

$$\nu = 0.3$$



Gambar 14 Model Mesh untuk uji struktur kotak

mesh 1 : 1000 elemen

mesh 2 : 3375 elemen

ANSYS 5.4			
model mesh	$\ u\ ^2$	$\ e\ ^2$	$\bar{\alpha}$ (%)
mesh 1	1.334929E+02	1.54212E+02	21.52
mesh 2	1.854212E+02	1.354212E+02	18.31

UI-FEAP			
model mesh	$\ u\ ^2$	$\ e\ ^2$	$\bar{\alpha}$ (%)
mesh 1	1.156532E+02	1.862512E+02	23.45
mesh 2	1.654212E+02	1.584556E+02	20.12

Dari hasil di atas, maka dapat terlihat bahwa terjadi singularity pada elemen sekitar beban nodal

7. Kesimpulan

Teknik pembentukan estimator kesalahan Zienkiewicz dan Zhu secara numerik cukup efektif untuk diimplementasikan pada UI-FEAP [19] yang dikompilasi dengan Compac Visual Fortran 6 [20] dan cukup baik untuk menunjukkan perbedaan tegangan dan

daerah yang perlu diperhalus dengan cukup tepat, juga cukup mudah untuk diprogram. Adanya gaya nodal pada bagian struktur membuat terjadinya perbedaan tegangan yang cukup besar, sehingga membutuhkan elemen yang cukup kecil pada daerah tersebut. Dan seringkali terjadi singularitas dari indeks penghalusan di daerah tersebut. Perubahan bentuk struktur juga membuat perbedaan tegangan yang cukup besar, sehingga dibutuhkan juga elemen yang relatif kecil, sehingga dapat mentransfer tegangan secara baik, akan tetapi ada kemungkinannya terjadi singularitas indeks penghalusan.

Daftar Notasi

ξ, η, ζ	koordinat natural
$[J]$	matriks jakobian
$[j]$	invers matriks jakobian
$[N]$	matriks fungsi bentuk
ε	regangan aksial
γ	regangan geser
ρ	massa jenis
C_r	koefisien regangan (dengan asumsi bahwa gaya redaman adalah fungsi linier dari kecepatan)
$\{\sigma_o\}$	tegangan inisial
$[k]$	matriks kekakuan elemen
$[K]$	matriks kekakuan struktur
$[c]$	matriks redaman elemen
$[C]$	matriks redaman struktur
$[m]$	matriks massa elemen
$[M]$	matriks massa struktur
$\{f_n\}$	vektor gaya (ekivalen) elemen akibat beban volume dan permukaan
$\{f_v\}$	vektor gaya elemen akibat beban volume
$\{f_s\}$	vektor gaya elemen akibat beban permukaan
$\ e\ $	kesalahan terhadap norma energi
u_{ex}	fungsi peralihan eksak
u	fungsi peralihan hasil elemen hingga

$\ u\ $	norma energi regangan hasil elemen hingga
$\{\bar{\sigma}\}$	matriks fungsi tegangan yang diperoleh dengan melakukan interpolasi terhadap hasil pemerataan nodal.
$\{\bar{\sigma}_x\}$	pemerataan tegangan pada nodal
$\bar{\sigma}_x$	fungsi pemerataan tegangan pada elemen
$\ \bar{e}\ $	pemerataan kesalahan norma energi pada nodal
$\ \bar{e}\ $	estimator kesalahan hasil pemerataan
$\ e\ $	kesalahan norma energi eksak
θ	indeks efektivitas
$\ u\ ^2$	dua kali energi regangan elemen
$\ u\ ^2$	dua kali energi regangan struktur
α	kesalahan relatif
$\bar{\alpha}$	kesalahan relatif estimasi
α'	kesalahan relatif ijin
$\ u_{ex}\ $	norma energi regangan eksak
ϕ	indeks penghalusan elemen terhadap kesalahan ijin
λ	nilai eigen
$[I]$	matriks identitas
m	jumlah elemen yang bertemu pada suatu nodal
p	pangkat tertinggi dari fungsi polinomial yang akan diintegrasikan
u, v, w	peralihan nodal
W	kerja virtual

Daftar Pustaka

1. COOK, R.D., 'Concept and Applications of Finite Element Analysis', John Wiley & Sons., second editions, (1974).
2. DHATT, G., TOUZOT, G., 'The Finite Element Method Displayed', John Wiley & Sons., (1985)
3. WEAVER, W. JR., JOHNSTON, P. R., 'Finite Elements for Structural Analysis', Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 07632, (1984)
4. ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L., 'The Finite Element Method', fourth edition, Vol. 2, Solid and Fluid Mechanics, Dynamics and Non-linearity, McGraw-Hill, (1991)
5. BATOZ, J.L., DHATT, G., 'Modelisation des Structures Par Element Finis', Vol. 1, Edition Hermes, Paris (1990)
6. BATHE, K. J., 'Finite Element Procedures', Prentice Hall International Editions, 1996.
7. BUDYNAS, RICHARD G., 'Advanced Strength and Applied Stress Analysis', International Editions, (1999)
8. ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L., 'The Finite Element Method', fourth edition, Vol. 1, Basic formulation and linear problems, McGraw-Hill, (1989)
9. KATILI, I., 'Aplikasi Metode Elemen Hingga pada Pelat Lentur', (2000)
10. WEAVER, W. JR., JOHNSTON, P. R., 'Structure Dynamics by Finite Element', Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 07632, (1987)
11. ZIENKIEWICZ, O. C., ZHU, J. Z., 'A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis', Internet, J. Num. Meth. Engng., vol. 24, 337-357, (1987).
12. ZIENKIEWICZ, O. C., ZHU, J. Z., 'Superconvergent Derivative Recovery Techniques and A posteriori Estimation in the Finite Element Method', Part 1: 'A General Superconvergent Recovery Technique', Internet, J. Num. Meth. Engng., 33, 1331-1382, (1992).
13. ZIENKIEWICZ, O. C., ZHU, J. Z., 'Superconvergent Derivative Recovery Techniques and A posteriori Estimation in the Finite Element Method', Part 2: 'The Zienkiewicz-Zhu A posteriori Error Estimator', Internet, J. Num. Meth. Engng., 33, 1331-1382, (1992).
14. IYER, NAGESH, R., RAO, T.V.S.R., APPA, 'A Review of Error Analysis and Adaptive Refinement

- Methodologies in Finite Element application, Part I : Error Analysis*, J. of Struct. Eng, 19, 77-94, 1992
15. IYER, NAGESH, R., RAO, T,V,S,R, APPA, 'A Review of Error Analysis and Adaptive Refinement Methodologies in Finite Element application, Part I : Adaptive Refinement', J. of Struct. Engng, 19, 77-94, 1992
 16. DUSTER, A., RANK, E., 'A Combination of an h- and a p-version of the Finite Element Method for Elastic-plastic Problems', European Conference on Computational Mechanics, August 31- September 3, Munchen, Germany, (1999).
 17. MOAVENI, S., 'Finite Element Analysis, Theory and Application with ANSYS', Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey 07458, (1999)
 18. F. ABBASSIAN, D. J. DAWSWELL, N.C. KNOWLES, 'NAFEMS', Free Vibration Benchmarks, (1987)
 19. KATILI, I., 'Programasi Metode Elemen Hingga dengan UI-FEAP', Penerbit FT-UI, (2001)
 20. COMPAQ, 'Compaq Fortran Language Reference Manual', Compaq Computer Corporation, Houston, Texas 1999)