

## Konduksi Kalor Hiperbolik : Menentukan Nilai Termal Difusivitas, Waktu Termal Relaksasi dan Termal konduktivitas Menggunakan Temperatur Osilasi

Nandy Putra, Danardono AS., Raldi A. Koestoer, dan Yanuar  
Jurusan Teknik Mesin, Fakultas Teknik Universitas Indonesia  
Kampus UI, Depok 16424 Tel. 7270032, 7270033

### Abstrak

Artikel ini menjelaskan suatu analisis model matematik persamaan hiperbolik konduksi kalor untuk mendapatkan secara simultan besaran difusivitas, waktu relaksasi dan konduktivitas termal suatu benda semi tak terhingga dengan menggunakan pembangkit osilasi panas. Dengan asumsi kecepatan rambat kalor pada persamaan konduksi kalor hiperbolik (non-Fourier) suatu medium adalah terbatas, maka solusi eksaknya dapat dijadikan dasar perhitungan untuk merancang suatu piranti pengukuran baru yang berfungsi untuk mendapatkan besaran ketiga parameter tersebut..

### Abstract

This paper present mathematical model of hyperbolic heat conduction equation to determine thermal diffusivity, thermal relaxation time and thermal conductivity of the semi-infinite body using oscilated heat generator. Using the finite propagation velocity in the modified hyperbolic equation of non-Fourier, the exact solution should be considered as a basic calculation in designing an experimental apparatus for determine 3 parameters of thermal conduction precedent.

### 1. Pendahuluan

Perkembangan teknik pengukuran transien untuk sifat termal pada suatu material secara internsif telah dilakukan sejak awal tahun 1900. Perkembangan teknologi dan pengetahuan secara umum mengarah pada penemuan metode pengukuran steady yang lebih cepat, lebih produktif terhadap suatu spesimen skala kecil serta dapat diperoleh jangkauan besaran temperatur yang lebih luas atas beberapa parameter termofiska secara serentak. Perkembangan ini dimungkinkan sejalan dengan perkembangan peralatan pengukuran, kecepatan sistem akusisi data serta perangkat pengolah data pendukungnya. Sampai saat ini telah dikem-bangkan berbagai metode transien antara lain metode *hot-wire*, *flash pulse* dan *temperatur osilasi*.

Metode *flash pulse* digunakan secara luas untuk mengukur termal difusivitas material. Metode mudah dan sederhana ini pertama kali diperkenalkan oleh Parker et.

al pada tahun 1961 dari *The US Navy Radiological Defence Laborator*. Prinsipnya menggunakan permukaan bagian depan dari lempengan sampel (berbentuk bulat pipih) yang diberikan secara singkat energi radian Sumber energi radian ini biasanya berasal dari laser atau sinar lampu xenon dan waktu radiasinya sekitar 1 ms atau bahkan lebih singkat. Hasil dari peningkatan temperatur di sisi keping yang lainnya diukur dan kemudian termal difusivitas material dapat dihitung dari perubahan kenaikan temperatur terhadap waktu [1].

Metode *hot wire* adalah metode yang juga mudah dan cepat untuk mendapatkan sifat termal dari material. Metode ini juga banyak digunakan oleh para peneliti untuk mengukur material padat yang memiliki harga termal konduktivitas rendah seperti misalnya, batu karang, fiber, bahan makanan, dan berbagai jenis bahan berporositas tinggi [1].

Metode *temperatur osilasi* pertama kali diperkenalkan oleh Angstrom thn 1861

untuk meneliti penyebaran temperatur di dalam bumi yang disebabkan oleh perubahan radiasi sinar matahari. Dengan menganggap permukaan bumi sebagai bentuk semi tak hingga, Angstrom menyatakan bahwa penyebaran temperatur di dalam bumi sangat tergantung pada termal difusivitas bumi itu sendiri. Pada Tahun 1990, Roetzel mengembangkan metode ini untuk mengukur termal difusivitas dan termal konduktivitas secara simultan pada material padat, gas dan cair [2].

Seluruh teknik pengukuran yang dijelaskan diatas menggunakan kaidah Fourier untuk perpindahan kalor secara konduksi sebagai dasar perhitungannya. Meskipun persamaan Fourier ini telah berhasil diterapkan, namun demikian masih timbul keraguan semenjak dipublikasikan [3]. Salah satu masalah adalah kecepatan rambat kalor yang dianggap tak terhingga dalam proses *unsteady* sebagai hasil interpolasi persamaan Fourier tersebut.

Cattaneo dan Vernotte mengungkapkan secara terpisah model waktu termal relaksasi untuk menghitung flux kalor di dalam zat padat. Waktu termal relaksasi diperkenalkan sebagai parameter fisika baru merupakan waktu tunggu antara gradien temperatur dengan fluks kalor. Secara teoritis, waktu termal relaksasi untuk bahan metal dan dielektrik dapat dihitung jika pembawa kalor yang dominan adalah elektron maupun phonon. Sementara ini belum ada suatu metode eksperimen untuk mengukur secara langsung waktu termal relaksasi tersebut.

Pengukuran waktu termal relaksasi atau kecepatan rambat dari gelombang kalor pada temperatur ruang jarang dijumpai dalam literatur. Untuk bahan yang homogen, harga waktu termal relaksasi untuk gas berkisar antara  $10^{-8}$  sampai  $10^{-10}$  detik dan untuk zat cair dan dielektrik zat padat berkisar antara  $10^{-10}$  sampai  $10^{-12}$  detik. Dengan pengecualian bahan organik dan bahan yang berporositas, nilai waktu termal relaksasi untuk material teknik adalah berkisar antar nano sampai pico detik. Nilai sangat kecil ini menunjukkan bahwa efek dari non Fourier (persamaan hiperbolik) tidaklah terlalu penting [3,4].

## 2. Tujuan penelitian

Sebelum didapatkannya tabel data waktu termal relaksasi atau kecepatan rambat gelombang kalor untuk berbagai macam material, solusi eksak dari persamaan kalor konduksi hiperbolik dapat digunakan sebagai dasar perhitungan untuk merancang piranti keras untuk mengukur waktu termal relaksasi maupun kecepatan rambat kalor. Persamaan hiperbolik kalor konduksi bentuk semi tak hingga diuraikan sedemikian rupa untuk menentukan difusivitas, waktu relaksasi dan konduktivitas termal dengan menggunakan metode temperatur osilasi.

## 3. Teori dan studi literatur

Teori klasik konduksi kalor menyatakan bahwa besarnya fluks kalor sangat proposional terhadap gradien temperatur, dan didefinisikan dalam bentuk,

$$q = -\lambda \nabla T \quad (1)$$

Dalam kasus konduksi kalor *unsteady*, persamaan parabolik konduksi kalor (Fourier) mengasumsikan kecepatan rambat kalornya adalah tak hingga. Hal ini akan menyebabkan penyimpangan data apabila diterapkan untuk kurun waktu yang sangat singkat, pada fluks kalor yang tinggi, dan pada kasus temperatur cryogenik yang mengarah pada kecepatan rambat kalor yang rendah [5].

Untuk mengatasi hal ini dalam model klasik perpindahan kalor secara konduksi yang menganggap kecepatan tak terhingga rambatan kalor serta dalam kaitannya untuk memperoleh perhitungan yang lebih akurat, maka Cattaneo dan Vernotte (1958) serta Chester (1963) mengusulkan satu modifikasi dari kaidah Fourier atas perpindahan kalor konduksi. Dengan didasari oleh model relaksasi konduksi kalor di dalam zat padat dan cair, maka persamaan parabolik konduksi kalor diganti oleh persamaan hiperbolik yang mengasumsikan kecepatan rambat kalornya terbatas, yaitu:

$$q = -\lambda \nabla T - \tau \frac{\partial q}{\partial t} \quad (2)$$

dan

$$-\nabla q = c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3)$$

Persamaan (1) dan (2) mengarah pada penjelasan profil temperatur unsteady dalam bentuk persamaan hiperbolik:

$$c_p \rho \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \tau \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right) = \lambda \nabla^2 T \quad (4)$$

Dalam persamaan (2) dan (3),  $\tau$  merupakan waktu termal relaksasi atau tambahan waktu untuk permulaan aliran kalor setelah gradien temperatur ditentukan pada medium. Itu berarti bahwa laju kalor tidak mulai dengan seketika itu juga melainkan meningkat secara perlahan-lahan dengan waktu termal relaksasi sampai gradien temperatur dicapai.

Waktu termal relaksasi adalah suatu mekanisme dasar bagi fenomena termal resonansi yang tidak dapat depicted oleh teori difusi [6]. Ini menjembatani dari kecepatan rambat kalor ( $C$ ) ke termal diffusivitas ( $a$ ) di dalam teori gelombang kalor konduksi [7]. Secara matematis, waktu termal relaksasi  $\tau$ , dapat dirumuskan menjadi  $a/C^2$ .

Di dalam literatur dapat dijumpai bahwa persamaan hyperbolik ini telah banyak diselesaikan untuk berbagai macam situasi dan kondisi fisisnya. Beragam macam analisa dan metode numerik juga telah banyak disampaikan untuk menyelesaikan kasus konduksi kalor hyperbolik pada berbagai macam aplikasi dan konfigurasi yang bertujuan untuk memprediksi secara akurat profil temperatur untuk bentuk geometri dan kondisi batas.

Penelitian yang dilakukan oleh Özisik dan koleganya [7,8,9,10,11] memprediksikan pertumbuhan dari pulsa termal di dalam zat padat satu dimensi. Pengaruh ketergantungan temperatur pada termal konduktivitas dengan kecepatan rambat kalor untuk bentuk semi tak hingga dibawah kondisi yang berbeda pada  $x = 0$  dengan menerapkan energi pulsa telah

dipelajari oleh Glass et al. (1986). Hasilnya menunjukkan bahwa pengaruh dari non-Fourier sangatlah penting artinya [10]. Beragam macam ekperimental juga telah dilakukan untuk memperoleh harga dari waktu termal relaksasi. Pembuktian eksperimen yang baru-baru ini dilakukan menerangkan bahwa perpindahan kalor konduksi transien di dalam material yang strukturnya mempunyai nilai waktu termal relaksasi dalam orde detik [3,4].

#### 4. Menentukan persamaan Termal Diffusivitas and Time Relaxation

Aliran unsteady terjadi apabila fluks kalor dan gradien temperatur merupakan fungsi waktu dan ruang. Persamaan hperbolik kesetimbangan energi untuk kondisi unsteady dapat ditulis sebagai berikut :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\psi}{\lambda} = \frac{1}{a} \left( \frac{dT}{dt} + \tau \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right) \quad (5)$$

di mana 'a' adalah termal diffusivitas dan  $\lambda$  termal konduktivitas.

Bentuk semi tak hingga mengasumsikan bahwa kondisi syarat batas adalah bebas terhadap koordinat y dan z dan tidak ada pembangkitan energi. Jadi distribusi temperatur di dalam material hanya sebagai fungsi x dan t saja, sehingga persamaan (6) dapat diringkas menjadi :

$$a \frac{d^2 T}{dx^2} = \left( \frac{dT}{dt} + \tau \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right) \quad (6)$$

Syarat lapisan batas di permukaan material pada  $x = 0$  adalah variasi temperatur permukaan yang diisolasikan, yaitu :

$$T(x = 0, t) = T_m + \Theta_0 \cos(\omega t + \theta_0) \quad (7)$$

Bila didefinisikan bahwa variasi temperatur sebagai  $\Theta = T - T_m$ , lalu kondisi

syarat batas (7) dapat kembali dituliskan sebagai :

$$\Theta(x = 0, t) = \Theta_0 \exp(i\omega t) \quad (8)$$

dimana  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\Theta_0$  dan  $\omega$  adalah amplitudo and frekwensi angular dari temperatur osilasi.

Syarat batas lainnya diberikan adalah sebagai berikut

$$\Theta(x = \infty, t) = 0 \quad (9)$$

Persamaan (6) dapat diselesaikan dengan menggunakan metode variasi parameter. Apabila solusi umum dari persamaan (10)

$$\frac{d^2\Theta}{dx^2} - \tilde{C}_0^2\Theta = 0 \quad (10)$$

adalah

$$\Theta(x) = \tilde{C}_1 \exp(-\tilde{C}_0 x) + \tilde{C}_2 \exp(+\tilde{C}_0 x) \quad (11)$$

dimana  $C_1$  and  $C_2$  adalah konstanta, kita susmsikan persamaan umum dari persamaan (8) adalah :

$$\Theta(x, t) = \xi(x) \exp(i\omega t) \quad (12)$$

Dengan menurunkan persamaan (12) terhadap waktu pada orde pertama dan orde kedua serta terhadap jarak dalam orde ke dua, berturut-turut kemudian substitusikan hasilnya kedalam persamaa diferensial (6), maka diperoleh persamaan ;

$$\frac{\partial^2 \xi(x)}{\partial x^2} - \xi(x) \left[ \frac{i\omega}{a} - \frac{\tau\omega^2}{a} \right] = 0 \quad (13)$$

asumsi bahwa

$$\xi(x) = \exp(\tilde{C}_0 x) \quad (14)$$

kemudian diperoleh :

$$0 = (\tilde{C}_0)^2 - \left[ \frac{i\omega}{a} - \frac{\tau\omega^2}{a} \right] \quad (15)$$

Hasil dari persamaan diatas adalah

$$(\tilde{C}_0) = \pm \sqrt{\left[ \frac{i\omega}{a} - \frac{\tau\omega^2}{a} \right]} \quad (16)$$

Solusi umum dari permasalahan diatas adalah :

$$\begin{aligned} \xi(x) = & \tilde{C}_1 \exp(-x \sqrt{\left[ \frac{i\omega}{a} - \frac{\tau\omega^2}{a} \right]}) \\ & + \tilde{C}_2 \exp(+x \sqrt{\left[ \frac{i\omega}{a} - \frac{\tau\omega^2}{a} \right]}) \end{aligned} \quad (17)$$

Substitusikan persaman ini ke dalam persamaan (12) dan kita memperoleh distribusi temperatur kompleks di dalam bentuk semi tak hingga sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \Theta(x, t) = & \tilde{C}_1 \exp(i\omega t - x \sqrt{\left[ \frac{i\omega}{a} - \frac{\tau\omega^2}{a} \right]}) \\ & + \tilde{C}_2 \exp(i\omega t + x \sqrt{\left[ \frac{i\omega}{a} - \frac{\tau\omega^2}{a} \right]}) \end{aligned} \quad (18)$$

Dengan menggunakan syarat lapisan batas dari persamaan (9), akan diperoleh

$$\Theta(x = \infty, t) = 0 \rightarrow \tilde{C}_2 = 0 \quad (19)$$

Dengan menggunakan syarat lapisan batas dari persamaan (8), konstanta  $C_1$  menjadi

$$\tilde{C}_1 = \Theta_0 \quad (20)$$

Dengan mesubstitusikan persamaan (19) dan (20) ke dalam persamaan (18), maka distribusi temperatur kompleks adalah :

$$\Theta(x,t) = \Theta_0 \exp\left(i\omega t - x \sqrt{\frac{i\omega}{a} - \frac{\tau\omega^2}{a}}\right) \quad (21)$$

Akhirnya distribusi temperatur di dalam bentuk real dapat dituliskan sebagai berikut

$$\Theta(x,t) = \Theta_0 \exp\left(-x \sqrt{\frac{\omega}{2a} \kappa}\right) \cos\left(\omega t - x \sqrt{\frac{\omega}{2a} \kappa}\right) \quad (22)$$

dimana parameter tanpa dimensi  $\kappa$  adalah

$$\kappa = \sqrt{(\tau\omega)^2 + 1} - \tau\omega \quad (23)$$

dalam limit dari  $\tau \rightarrow 0$ , persamaan (22) berubah menjadi

$$\Theta(x,t) = \Theta_0 \exp\left(-x \sqrt{\frac{\omega}{2a}}\right) \cos\left(\omega t - x \sqrt{\frac{\omega}{2a}}\right) \quad (24)$$

yang mana persamaan ini identik dengan hasil persamaan yang di turunkan dengan persamaan konduksi kalor parabolik (Fourier) seperti yang terdapat pada Czarnetzki 1997.

Perbandingan amplitudo dan perbedaan phase antara permukaan material  $x = 0$  dan pada kedalaman tertentu di dalam material adalah:

$$B = \frac{\Theta}{\Theta_0} = \exp\left(-x \sqrt{\frac{\omega}{2a} \kappa}\right) \quad (25)$$

dan

$$G = \varphi = x \sqrt{\frac{\omega}{2a} \kappa} \quad (26)$$

dari perbandingan amplitudo dan perbedaan phase, termal diffusivitas dengan fungsi  $\kappa$  dapat diperoleh

$$a = \frac{\omega}{2} \left[ \frac{x}{\ln(B)} \right]^2 \kappa \quad (27)$$

dan

$$a = \frac{\omega}{2} \left[ \frac{x}{G} \right]^2 \frac{1}{\kappa} \quad (28)$$

Dalam kaitan untuk menghitung termal diffusivitas, adalah penting untuk mengeliminasi parameter  $\kappa$ . Hal ini dapat dilakukan dengan tiga cara yang berbeda yakni : (1) dengan menggunakan informasi pada amplitudo and phase dari temperatur osilasi pada satu frekwensi, (2) dengan mengukur amplitudo pada dua frekwensi yang berbeda (3) dari data phase pada temperatur osilasi pada dua frekwensi.

Cara pertama kelihatannya lebih enak digunakan sebab tidak diperlukan pengulangan pengukuran dengan perbedaan frekwensi.

Apabila cara pertama digunakan maka termal diffusivitas dapat ditentukan dengan persamaan dibawah ini

$$a = \sqrt{\underbrace{\frac{\omega}{2} \left[ \frac{x}{\ln(B)} \right]^2 \kappa}_{a \text{ from equation (27)}} \quad \underbrace{\frac{\omega}{2} \left[ \frac{x}{G} \right]^2 \frac{1}{\kappa}}_{a \text{ from equation (28)}}} \quad (29)$$

Termal diffusivitas pada persamaan (27) atau pada persamaan (28) memiliki nilai yang sama sehingga,

$$a = \frac{\omega}{2} \left[ \frac{x}{\ln(B)} \right]^2 \kappa = \frac{\omega}{2} \left[ \frac{x}{G} \right]^2 \frac{1}{\kappa} \quad (30)$$

Jadi parameter  $\kappa$  dapat ditentukan

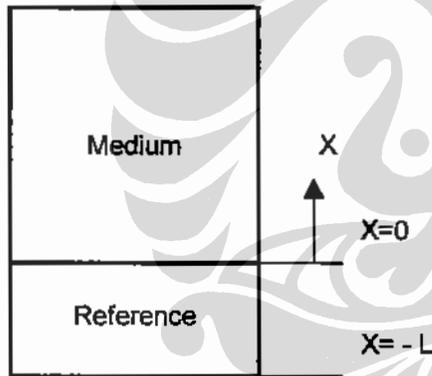
$$\kappa = \frac{\ln(B)}{G} \quad (31)$$

substitusikan persamaan ini ke dalam persamaan (23), lalu waktu termal relaksasi dapat dihitung dengan persamaan berikut ini

$$\tau = [1 - \kappa^2] \frac{1}{2\omega\kappa} \quad (32)$$

**5. Menentukan termal konduktivitas.**

Guna menentukan termal konduktivitas, maka diperlukan informasi berupa besar fluks kalor yang mengalir di dalam medium, dal ini sulit ditentukan apabila metode temperatur osilasi diterapkan. Akan tetapi hal ini dapat diatasi dengan cara menambahkan satu material referensi pada bagain bahwa sampel, seperti yang ditampilkan pada gambar 1. Formulasi matematika dari model adalah sebagai berikut : (subscript R, S menunjukan material referensi dan sampel )



Gambar 1. Model matematika

Kondisi pada model ini adalah bahwa pada x=0, hambatan kontak termal pada titik ini ideal, maka syarat batas yang berlaku pada titik ini adalah sebagai berikut,

$$T_R(x = 0, t) = T_s(x = 0, t) \quad (33)$$

$$q_R(x = 0, t) = q_s(x = 0, t) \quad (34)$$

$$\frac{\partial q_R}{\partial t} = \frac{\partial q_s}{\partial t} \quad (35)$$

Konduksi kalor hiperbolik pada material referensi adalah sama dengan persamaan (2).

$$\tau_R \frac{\partial q_R}{\partial t} + q_R = -\lambda_R \frac{\partial T_R}{\partial x} \quad (36)$$

Apabila pada material referensi digunakan material seperti metal yang diasumsikan memiliki nilai waktu termal relaksasi yang sangat kecil sekali, oleh karena itu bisa dikatakan bahwa pada material referensi  $\tau$  adalah 0,

$$\tau_R \frac{\partial q_R}{\partial t} \approx 0 \quad (37)$$

maka persamaan (36) dapat diubah menjadi

$$q_R(t) = -\lambda_R \frac{\partial T_R}{\partial x} \quad (38)$$

Sedangkan persamaan konduksi kalor hiperbolik untuk sampel bisa ditulis sebagai berikut

$$\tau_s \frac{\partial q_s}{\partial t} + q_s = -\lambda_s \frac{\partial T_s}{\partial x} \quad (39)$$

Dengan menggunakan syarat lapisan batas pada persamaan (35) dan mensubstitusikan turunan persamaan (38) terhadap waktu ke dalam persamaan (39), maka diperoleh :

$$q_s = -\lambda_s \frac{\partial T_s}{\partial x} + \lambda_R \tau_s \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T_R}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} \quad (40)$$

Dengan menggunakan syarat lapisan batas (34) dan mensubstitusikan persamaan (38) kedalam persamaan (40), maka sekarang persamaan differensialnya menjadi

$$\lambda_R \frac{\partial T_R}{\partial x} + \lambda_R \tau_s \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T_R}{\partial x} \right) = \lambda_s \frac{\partial T_s}{\partial x} \quad (41)$$

Distribusi temperatur kompleks di dalam material referensi dapat diekspresikan di bawah ini :

$$\Theta(x \leq 0, t) = \tilde{C}_1 \exp(i\omega t - x \sqrt{\frac{i\omega}{a_R}}) + \tilde{C}_2 \exp(i\omega t + x \sqrt{\frac{i\omega}{a_R}}) \quad (42)$$

turunan persamaan (42) terhadap jarak dan pada x sama dengan 0 adalah

$$\frac{\partial \Theta(x \leq 0, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \tilde{C}_1 \exp(i\omega t) \left(-\sqrt{\frac{i\omega}{a_R}}\right) + \tilde{C}_2 \exp(i\omega t) \left(\sqrt{\frac{i\omega}{a_R}}\right) \quad (43)$$

kemudian diturunkan kembali persamaan (43) terhadap waktu dan menetapkan x = 0 maka diperoleh

$$\frac{\partial^2 \Theta(x \leq 0, t)}{\partial t \partial x} \Big|_{x=0} = \tilde{C}_1 \exp(i\omega t) \left(-\sqrt{\frac{i\omega}{a_R}}\right) (i\omega) + \tilde{C}_2 \exp(i\omega t) \left(\sqrt{\frac{i\omega}{a_R}}\right) (i\omega) \quad (44)$$

Seperti pada bagian sebelumnya, distribusi temperatur kompleks pada bentuk semi tak hingga pada bagian sampal adalah

$$\Theta(x, t) = \Theta_0 \exp(i\omega t - x \sqrt{\frac{i\omega - \tau\omega^2}{a}}} \quad (45)$$

Dengan menurunkan persamaan ini terhadap jarak dan pada x = 0 maka diperoleh

$$\frac{\partial \Theta(x \geq 0, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \Theta_0 \exp(i\omega t) \left(-\sqrt{\frac{i\omega - \tau\omega^2}{a_s}}\right) \quad (46)$$

substitusikan semua persamaan (43), (44), (45) ke dalam persamaan (41), maka akan diperoleh

$$\lambda_R \left\{ \tilde{C}_1 \exp(i\omega t) \left(-\sqrt{\frac{i\omega}{a_R}}\right) + \tilde{C}_2 \exp(i\omega t) \left(\sqrt{\frac{i\omega}{a_R}}\right) \right\} + \lambda_s \Theta_0 \exp(i\omega t) \left(-\sqrt{\frac{i\omega - \tau\omega^2}{a_s}}\right) - \lambda_s \left\{ \tilde{C}_1 \exp(i\omega t) \left(-\sqrt{\frac{i\omega}{a_R}}\right) (i\omega) + \tilde{C}_2 \exp(i\omega t) \left(\sqrt{\frac{i\omega}{a_R}}\right) (i\omega) \right\} = \lambda_s \Theta_0 \exp(i\omega t) \left(-\sqrt{\frac{i\omega - \tau\omega^2}{a_s}}\right) \quad (47)$$

dengan simplifikasi, maka persamaan (47) bisa ditulis kembali menjadi

$$\tilde{C}_1 - \tilde{C}_2 = \frac{\lambda_s}{\lambda_R} \sqrt{\frac{a_R}{a_s}} \Theta_0 \left(\sqrt{\frac{i - \tau\omega}{i}}\right) \left(\frac{1}{1 + \tau_s i\omega}\right) \quad (48)$$

dari kondisi syarat batas lainnya diperoleh

$$\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 = \Theta_0 \quad (49)$$

Substitusi dari kedua persamaan maka konstanta  $\tilde{C}_1$  dan  $\tilde{C}_2$  dapat ditentukan

$$\tilde{C}_1 = \frac{\Theta_0}{2} \left\{ 1 + \frac{\lambda_s}{\lambda_R} \sqrt{\frac{a_R}{a_s}} \left[ \left(\sqrt{\frac{i - \tau\omega}{i}}\right) \left(\frac{1}{1 + \tau_s i\omega}\right) \right] \right\} \quad (50)$$

$$\tilde{C}_2 = \frac{\Theta_0}{2} \left\{ 1 - \frac{\lambda_s}{\lambda_R} \sqrt{\frac{a_R}{a_s}} \left[ \left(\sqrt{\frac{i - \tau\omega}{i}}\right) \left(\frac{1}{1 + \tau_s i\omega}\right) \right] \right\} \quad (51)$$

Substitusikan persamaan (50) dan persamaan (51) ke dalam persamaan (42),

maka diperoleh distribusi temperatur kompleks pada material referensi :

$$\Theta^*(x \leq 0, t) = \Theta_0 \exp(a x) \left\{ \begin{aligned} & \cosh \xi \sqrt{\frac{i\omega}{a_R}} - \\ & C \sqrt{\frac{i-\tau\omega}{i}} \left( \frac{1}{1+\tau_s i\omega} \right) \sinh \left( \frac{i\omega}{a_R} \right) \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

dimana parameter tak berdimensi C didefinisikan sebagai berikut :

$$C = \frac{\lambda_s}{\lambda_R} \sqrt{\frac{a_R}{a_s}} \quad (53)$$

Perbandingan amplitudo pada  $x = 0$  dan  $x = -L$  dapat ditulis sebagai berikut

$$B_R^* = \cosh(\xi \sqrt{i}) + C \left( \sqrt{\frac{i-\tau\omega}{i}} \right) \left( \frac{1}{1+\tau_s i\omega} \right) \sinh(\xi \sqrt{i}) \quad (54)$$

dimana

$$\xi = L \sqrt{\frac{\omega}{a_R}} \quad (55)$$

Untuk mendapatkan perbandingan amplitudo dan perbedaan phase dalam bentuk real dapat digunakan persamaan (56) dan (57) dibawah ini

$$B_R = \sqrt{(\text{Re}[B_R^*])^2 + (\text{Im}[B_R^*])^2} \quad (56)$$

dan

$$G_R = \arctan \left( \frac{\text{Im}[B_R^*]}{\text{Re}[B_R^*]} \right) \quad (57)$$

Jadi termal konduktivitas dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (56) dan (53) atau persamaan (57) dan (53).

## 6. Kesimpulan

Solusi untuk mendapatkan termal difusivitas, waktu termal relaksasi dan termal konduktivitas dalam persamaan hiperbolik konduksi kalor yang menggunakan temperatur osilasi telah diuraikan secara jelas. Perancangan piranti eksperimen hanya membutuhkan minimal 3 alat ukur temperatur guna mendapatkan ketiga parameter tersebut. Disamping itu dapat pula diperoleh parameter tambahan seperti kecepatan rambat kalor dari parameter 'a' dan 'τ'.

Metode osilasi temperatur bisa digunakan untuk membuat alat ukur yang dibutuhkan, yaitu alat ukur yang mampu mengukur berbagai macam parameter dalam satu kali pengukuran.

## Daftar Pustaka

1. K.D. Maglic, (1984), *Compendium of thermo-physical property measurement methods*, Plenum Press, New York.
2. Roetzel W., Prinzen S., and Xuan Y., 1990, *Measurement of thermal diffusivity using temperature oscillations*, *Thermal Conductivity* 21, Plenum Press : 201-207.
3. Kaminski W (1990) Hyperbolic heat conduction equation for materials with a non-homogeneous inner structure. *ASME Journal Heat Transfer* 112:555-560.
4. Mitra K; Kumar S; Vedavarz A; Moallemi MK (1995) Experimental evidence of hyperbolic heat conduction in processed meat. *ASME Journal Heat Transfer* 117 p. 568-573.
5. Bai C; Lavine AS (1995) On hyperbolic heat conduction and the second law of thermo-dynamics. *ASME Journal Heat Transfer* 117:256-263.
6. Tzou DY (1993) An engineering assessment to the relaxation time in thermal wave propagation. *Int. Journal Heat Transfer* 36 (7):1845-1851.

7. Ozisik M; Tzou DY (1994) On the wave theory in heat conduction. ASME Journal Heat Transfer 116:526-535.
8. Ozisik MN; Vick B (1984) Propagation and reflection of thermal waves in a finite medium. Int. Journal Heat Mass Transfer 27 (10).1845-1854.
9. Frankel JJ; Vick B; Özisik MN (1987) General formulation and analysis of hyperbolic heat conduction in composite media. Int. Journal Heat Mass Transfer 30 (7):1293-1305.
10. Glass DE; Ozisik M; Vick B (1987) non Fourier effects on transient temperature resulting from periodic on-off heat flux. Int. Journal Heat Mass Transfer 30 (8):1623-1631.
11. Vick B; Özisik MN (1983) Growth and decay of thermal pulse predicted by hyperbolic heat conduction equation. ASME Journal Heat Transfer 105:902-907.
12. Czarnetzki, W.,1997, Meßverfahren mit Temperaturschwingungen für Wärme und Temperaturleitfähigkeit, Dissertation, Hamburg.