

## Analisis Elastoplastis Untuk Pipa Tebal

Tresna P. Soemardi

Laboratorium Perancangan Mekanikal  
Jurusan Mesin, Fakultas Teknik Universitas Indonesia  
Kampus UI, Depok 16424 Tel.62-21-7270032. Fax.62-21-7270033  
E-mail: tresdi@eng.ui.ac.id

### Abstrak

*Efisiensi bahan pada pipa tebal bisa dilakukan dengan memberikan tegangan awal (prestress) dengan memberi tekanan awal yang menyebabkan bagian pipa menjadi plastis. Ketika tekanan awal ini dihilangkan tegangan akan tetap tinggal pada pipa. Tinggalnya tegangan ini akan memperbaiki distribusi tegangan pada pipa ketika pipa berkerja dengan fluida bertekanan.*

*Untuk menentukan besarnya tekanan awal yang harus diberikan, dimana proses yield terjadi pada pipa, kita harus bisa menentukan lokasi antarmuka elastis-plastis (elastic-plastic interface). Dalam kajian ini dipakai metoda elemen hingga untuk menentukan antarmuka elastis-plastis. Dalam hal ini dikembangkan sejumlah elemen elastis-plastis dan perhitungan iteratif untuk mendapatkan posisi antarmuka. Dua dari elemen yang dikembangkan berdasarkan pendekatan umum elemen hingga yang menggunakan fungsi polinomial. Dua elemen lebih jauh dikembangkan dengan solusi persamaan diferensial yang menggambarkan perilaku elastis-plastis pipa. Hasil yang diperoleh dibandingkan dengan elemen fungsi polinomial.*

*Pendekatan yang dikembangkan dalam kajian ini digambarkan dengan beberapa contoh dan tingkat konvergensi yang memuaskan ditunjukkan dalam kajian ini.*

### Abstract

*For more efficient use of materials thick pipes are sometimes pre-stressed by an initial pressure that causes part of the pipe to become plastic. On removing this initial pressure some stresses will be 'locked in' in the pipe. Such locked in stresses improve the stress distribution in the pipe when it is subsequently pressurized in service.*

*In order to determine the appropriate magnitude of the initial pressure, under which part of the pipe yields, one must locate the elastic-plastic interface. In this investigation a finite element procedure is developed for determination of the elastic-plastic interface. To this end a number of elastic and plastic elements are developed and an iterative scheme is described for finding the position of the interface. Two of the elements developed are based on the usual methodology of the finite element approach wherein polynomial shape functions are used. Two further elements are developed by using solutions of the differential equations governing the elastic and plastic behaviour of the pipe. The results obtained from these latter, 'exact', elements are compared with those obtained from elements based on polynomial shape functions.*

*The approach developed in this investigation is illustrated by a number of examples and a satisfactory convergence rate is demonstrated.*

### 1. Pendahuluan

Tekanan dalam pipa akan mengakibatkan tegangan tangensial dan radial yang mencapai nilai maksimum pada permukaan dalam dan berkurang menuju permukaan luar. Sifat ini tentu dapat dimanfaatkan untuk efisiensi penggunaan bahan pada pipa. Kondisi tegangan yang berbeda-beda dalam

arah ketebalan dapat diatasi oleh jenis bahan yang berbeda bagian dalam dan luar pipa. Cara lain adalah dengan memberikan tekanan internal yang cukup tinggi pada pipa bahan tunggal akan menyebabkan bagian dalam mulur secara plastis sedangkan bagian luar tetap elastis karena tegangan yang lebih rendah. Dengan demikian setelah pemberian

tekanan terjadi karakteristik bahan yang berbeda antara bagian dalam dan bagian luar pipa. Pemanfaatan teknik ini juga dipakai dalam manufaktur laras senapan yang disebut autofretage process. Untuk pemakaian dalam jumlah besar tentu manufaktur badan pipa dengan kombinasi 2 bahan atau lebih akan sangat menghemat bahan dan memberi dampak ekonomi yang sangat berarti, yaitu harga yang lebih murah.

Dalam hal ini, kemampuan analisis yang paling penting adalah menentukan kondisi batas antara zona elastis dan plastis pipa. Distribusi tegangan tangensial ( $\sigma_{\theta\theta}$ ) dan radial ( $\sigma_{rr}$ ) pada pipa bahan tunggal, pipa kombinasi 2 bahan dan pipa yang terdeformasi plastis bagian dalamnya dapat dilihat pada gambar 1 dibawah ini. Dari gambar ini tampak bahwa untuk pipa kombinasi tegangan tangensial tidak kontinyu sedangkan pipa yang sebagian plastis tetap kontinyu.

## 2. Konsep Daerah Elastis

Didalam daerah elastis persamaan compatibility dan equilibrium dapat dinyatakan sbb:

$$\frac{d}{dr}(r\epsilon_{\theta\theta}) = \epsilon_{rr}, \text{compatibility} \quad (1)$$

$$\frac{d}{dr}\sigma_{rr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, \text{equilibrium} \quad (2)$$

Selanjutnya kita bisa membuat persamaan equilibrium dengan fungsi tegangan,  $\alpha$ , sbb:

$$\sigma_{rr} = \frac{\sigma}{r} \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{d\alpha}{dr} \quad (3)$$

dengan kondisi batas sbb:

$$\text{pada } r=r_0 \quad \sigma_{rr}=0 \quad \text{maka } \alpha|_{r=r_0}=0$$

$$\text{pada } r=r_i \quad \sigma_{rr}=-\rho_i \quad \text{maka } \alpha|_{r=r_i}=-r_i\rho_i \quad (4)$$

Maka dapat dibuat hubungan tegangan-regangan:

$$\epsilon_{rr} = \frac{1}{E}(\sigma_{rr} - \nu\sigma_{\theta\theta}) \quad \epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{E}(\sigma_{rr} - \nu\sigma_{rr}) \quad (5)$$

Sebagai penyederhanaan, diasumsikan bahwa tegangan aksial  $\sigma_z$  tidak ada. Kita anggap kasus ini seperti pipa terbuka seperti laras senapan misalnya. Kita dapat memformulasikan regangan dan persamaan compatibilitynya dalam fungsi  $\alpha$ . Persamaan ini diambil dari Timoshenko<sup>[1]</sup>:

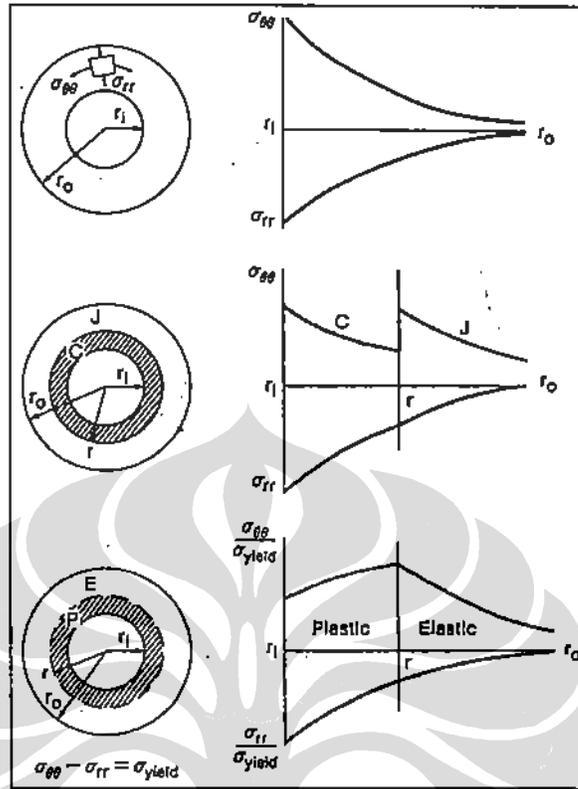
$$r^2 \frac{d^2\alpha}{dr^2} + r \frac{d\alpha}{dr} - \alpha = 0 \quad (6)$$

Untuk memecahkan persamaan (6) kita gunakan prosedur elemen hingga dan elemen dari  $r = r_i$  sampai  $r = r_j$  kita tuliskan formulasi Galerkin weighted residual:

$$\delta W_c^* = \int_{r_i}^{r_j} \left( r^2 \frac{d^2\alpha}{dr^2} + r \frac{d\alpha}{dr} - \alpha \right) \frac{\delta\alpha}{r} dr \quad (7)$$

Karena integrand merupakan inner product dari  $\epsilon_{rr}$  dan  $\delta\sigma_{rr}$ , tampak bahwa integral merupakan complementary virtual work untuk elemen. Untuk mengintegrasikan persamaan (7) dapat diperinci persamaannya menjadi:

$$\delta W_c^* = \int_{r_i}^{r_j} \delta \left[ -\frac{\alpha^2}{2r} - \frac{r}{2} \left( \frac{d\alpha}{dr} \right)^2 \right] dr + r \frac{d\alpha}{dr} \delta\alpha \Big|_{r_i}^{r_j} \quad (8)$$



Gambar 1. Distribusi tegangan dalam (i) a single elastic cylinder, (ii) a compound elastic cylinder dan (iii) a single partially plasticized cylinder (Sumber: dikembangkan dari Timoshenko et.al, 1970 dan Slatter, 1977<sup>[5]</sup>)

Karena kondisi batas pada persamaan (4) memerlukan  $\alpha$  pada radius dalam dan luar, kita bisa menghilangkan kondisi batas pada persamaan (8). Fungsi integral akan menunjukkan variasi energi regangan.

### 3. Modelisasi Elemen Hingga

Untuk mengembangkan model elemen hingga, pertama adalah menentukan  $\alpha$  dari persamaan linier berikut ini:

$$\alpha(r) = C_1 + C_2 r \quad (9)$$

Dengan mengevaluasi  $\alpha$  pada  $r=r_1$  dan  $r=r_2$ , maka  $\alpha(r)$  dapat dinyatakan dalam nodal variables sebagai berikut:

$$\alpha(r) = [N_1 N_2] \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

dimana,

$$N_1 = \frac{r_2 - r}{r_2 - r_1} \quad N_2 = \frac{r - r_1}{r_2 - r_1} \quad (11)$$

Maka dengan menggunakan persamaan (10) dan (11) kedalam persamaan (8), kita dapat mengembangkan matriks kekakuan seperti pada persamaan (12) dibawah ini:

$$[K_e] = \frac{1}{(r_2 - r_1)^2} \begin{bmatrix} r_2^2 \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) - r_1^2 + 2r_1 r_2 - r_2^2 & -r_1 r_2 \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \\ \text{sym} & r_2^2 \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) - r_1^2 + 2r_1 r_2 - r_2^2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Sebagai alternatif terhadap fungsi linier persamaan (9) kita dapat menggunakan solusi eksak persamaan (6). Dalam hal ini kita peroleh :

$$\alpha(r) = d_1 r + \frac{d_2}{r} \quad (13)$$

Selanjutnya diperoleh fungsi bentuk :

$$\bar{N}_1 = \left( r_1 r - \frac{r_1 r_2^2}{r} \right) \frac{1}{r_1^2 - r_2^2} \quad \bar{N}_2 = \left( r_2 r - \frac{r_1^2 r_2}{r} \right) \frac{1}{r_1^2 - r_2^2} \quad (14)$$

dan matriks kekakuannya :

$$\begin{bmatrix} \bar{N}_1 \\ \bar{N}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{(r_1^2 - r_2^2)^2} \begin{bmatrix} r_2^4 - r_1^4 & 2r_1^3 r_2 - 2r_1 r_2^3 \\ \text{sym.} & r_2^4 - r_1^4 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Karena persamaan (6) bersifat homogen dan kondisi batasnya ditentukan oleh  $\alpha$  saja, maka persamaan sistem elastisnya menjadi :

$$[K]_g \{ \alpha \}_G = \{ 0 \} \quad (16)$$

dimana  $[K]_G$  adalah matriks kekakuan global dan dalam persamaan (16) beberapa bentuk  $\alpha$  akan dispersifikasikan.

#### 4. Zona Plastis

Untuk masalah plastis, akan dipergunakan kriteria Tresca dan kondisi yield dinyatakan sebagai berikut,

$$\sigma_r - \sigma_{\theta} = 2k \quad (17)$$

dimana k adalah nilai batas tegangan geser maksimum dan nilainya dinyatakan dengan  $\sigma_{yield}/2$  [2-4]. Fungsi tegangan  $\alpha$  digunakan lagi untuk memenuhi persamaan keseimbangan, kita bisa juga menuliskan kriteria yield dalam fungsi  $\alpha$  [2],

$$\frac{d\alpha}{dr} - \frac{\alpha}{r} + 2k = 0 \quad (18)$$

Untuk mengembangkan model elemen hingga untuk mencari solusi persamaan ini,  $\alpha$  dinyatakan dengan fungsi linier seperti persamaan (9). Perlu diperhatikan unsur  $C_2 r$  memenuhi bagian homogen persamaan (18). Fungsi bentuk untuk cara solusi ini diberikan dalam persamaan (11). Untuk mengembangkan matriks kekakuan dan vektor beban, berkaitan dengan persamaan (17), kita gunakan pendekatan *least square* dan ditulis sebagai berikut :

$$\delta \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{2} \left( \frac{d\alpha}{dr} - \frac{\alpha}{r} + 2k \right)^2 dr = 0 \quad (19)$$

Penggunaan persamaan (11) dalam fungsi diatas menghasilkan matriks kekakuan dan vektor beban sebagai berikut :

$$[K]_e = \frac{1}{r_1 r_2 \ln \left( \frac{r_1}{r_2} \right)} \begin{bmatrix} r_2^2 & -r_1 r_2 \\ \text{sym.} & r_1^2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$[P]_e = 2k \begin{bmatrix} -r_2 \\ r_1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Sebagai alternatif matriks kekakuan bisa juga dikembangkan dengan cara solusi eksak dengan persamaan (18). Solusi ini diberikan oleh  $\alpha = d_1 r - 2kr \ln r$ . karena kita ingin mengembangkan *two-noded element*, kita nyatakan  $\alpha(r)$  sebagai berikut :

$$\alpha(r) = d_1 r - d_d r \ln r \quad (22)$$

Perlu diperhatikan bahwa solusi homogen persamaan (18) muncul dalam bagian awal persamaan (22). Dengan mengikuti prosedur konvensional kita dapat menentukan matriks kekakuan dan vektor beban. Hal yang identik diperoleh dari fungsi linier, seperti yang dicontohkan persamaan (20) dan (21). Alasan untuk hasil ini adalah ada pada

kedua fungsi interpolasi, dalam persamaan (9) dan (22), solusi homogen eksak persamaan diferensial ada. Oleh karena itu turunan matriks kekakuan dan vektor beban adalah eksak. Untuk zone plastis persamaan sistemnya berbentuk :

$$[K]_G \{\alpha\}_G = \{P\}_G \quad (23)$$

Karena matriks kekakuan dan vektor beban adalah eksak, nilai nodal  $\alpha$  yang dihitung juga eksak. Walaupun demikian diantara nodal nilai eksak  $\alpha$  dan tegangan akan diketahui jika persamaan (22) dipakai interpolasi (9) akan menghasilkan nilai pendekatan  $\alpha$  dan tegangan diantara node-node.

### Contoh Ilustratif

#### Contoh - 1

Dalam contoh ini kita membahas fenomena deformasi elastis murni. Suatu pipa dengan dimensi  $r_o = 100$  satuan panjang didiskritisasi menjadi 5 elemen berukuran sama. Tekanan internal  $P_i = 1$  (satuan tekanan) dan tekanan luar dianggap nol. Nilai-nilai  $\alpha$ ,  $\sigma_r$  dan  $\sigma_{\theta\theta}$  dihitung dengan elemen linier dan elastis eksak ditampilkan pada tabel 1 dan 2. Nilai  $\sigma_{\theta\theta}$  dalam kasus elemen linier dirata-ratakan pada titik-titik node. Dapat dilihat bahwa elemen linier memberikan hasil sangat dekat dengan elemen eksak.

Tabel 1 Analisis Elastis - elemen linier

VARIABLE	NODE					
	1	2	3	4	5	6
$\alpha$	-0.800 000 0 $\times 10^{+2}$	-0.6230748 $\times 10^{+2}$	-0.0557658 $\times 10^{+2}$	-0.2988191 $\times 10^{+2}$	-0.1451898 $\times 10^{+2}$	0.0
$\sigma_r$	-0.100 000 0 $\times 10^{+1}$	-0.7417557 $\times 10^0$	-0.5179157 $\times 10^0$	-0.3226295 $\times 10^0$	-0.1512394 $\times 10^0$	0.0
$(\sigma_{\theta\theta})_{avg}$	0.442 313 0 $\times 10^{+1}$	0.4302927 $\times 10^{+1}$	0.4078196 $\times 10^{+1}$	0.3882200 $\times 10^{+1}$	0.3710239 $\times 10^{+1}$	0.3629745 $\times 10^{+1}$

Tabel 2  
Analisis Elastis - elemen eksak

VARIABLE	NODE					
	1	2	3	4	5	6
$\alpha$	-0.800 000 0 $\times 10^{+2}$	-0.2360688 $\times 10^{+2}$	-0.4557576 $\times 10^{+2}$	-0.2968116 $\times 10^{+2}$	-0.1451852 $\times 10^{+2}$	0.0
$\sigma_r$	-0.100 000 0 $\times 10^{+1}$	-0.7417486 $\times 10^0$	-0.5179063 $\times 10^0$	-0.3226213 $\times 10^0$	-0.1512346 $\times 10^0$	0.0
$(\sigma_{\theta\theta})_{avg}$	0.455 555 6 $\times 10^{+1}$	0.4297304 $\times 10^{+1}$	0.4073482 $\times 10^{+1}$	0.3878177 $\times 10^{+1}$	0.3706790 $\times 10^{+1}$	0.3555556 $\times 10^{+1}$

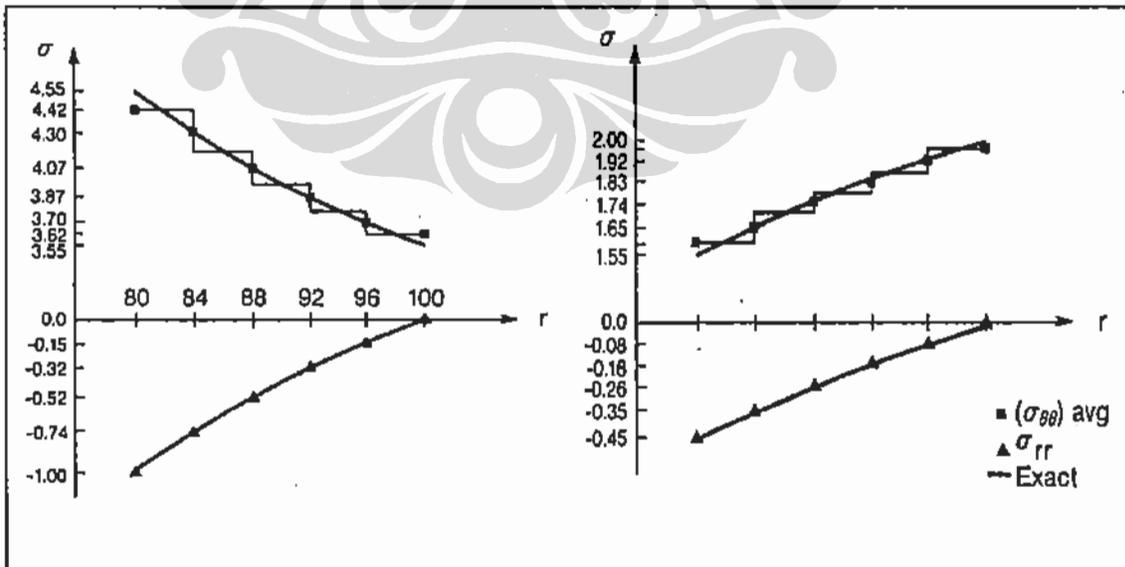
**Contoh - 2**

Dalam kasus ini kita menganalisa pipa secara plastis. Diasumsikan konstanta  $k = -1$  (satuan tegangan), hasilnya ditampilkan dalam tabel 3. Dalam kasus diatas elemen linier dan eksak adalah identik dan bahkan juga terhadap nilai  $\alpha$  dan  $\sigma_{rr}$  yang diperoleh dari kedua elemen adalah eksak. Komponen tegangan  $\sigma_{\theta\theta}$  bisa dihitung dari  $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rr} - 2k$  atau dari  $d\alpha/dr$ . Untuk elemen eksak

kedua prosedur memberikan hasil yang sama. Walaupun demikian, elemen kimia derivasi dari  $d\alpha/dr$  menghasilkan nilai  $\sigma_{\theta\theta}$  yang konstan dan ini mendekati nilai nodal rata-rata  $\sigma_{\theta\theta}$ , diperoleh dari elemen linier dengan diferensiasi  $\alpha$  ditulis  $(\sigma_{\theta\theta})_{avg}$  dalam tabel 3. Hasil untuk kedua kasus diatas ditunjukkan dalam grafik gambar 2.

Tabel 3  
Analisis Plastis

VARIA BLE	NODE					
	1	2	3	4	5	6
$\alpha$	-0.03570297 $\times 10^{+2}$	-0.2929137 $\times 10^{+2}$	-0.2249847 $\times 10^{+2}$	-0.2968116 $\times 10^{+2}$	-0.1451852 $\times 10^{+2}$	0.0
$\sigma_{rr}$	-0.446287 $\times 10^0$	-0.3487068 $\times 10^0$	-0.2556668 $\times 10^0$	-0.3226213 $\times 10^0$	-0.1512346 $\times 10^0$	0.0
$\sigma_{\theta\theta}$	0.15537129 $\times 10^{+1}$	0.1651293 $\times 10^{+1}$	0.1744333 $\times 10^{+1}$	0.3878177 $\times 10^{+1}$	0.3706790 $\times 10^{+1}$	0.2000000 $\times 10^{+1}$
$(\sigma_{\theta\theta})_{avg}$	0.1602900 $\times 10^1$	0.1650537 $\times 10^1$	0.1743644 $\times 10^1$	0.1832602 $\times 10^1$	0.1917777 $\times 10^1$	0.1959456 $\times 10^{+1}$



Gambar. 2. Distribusi tegangan (i) pipa elastis (ii) pipa yang murni plastis

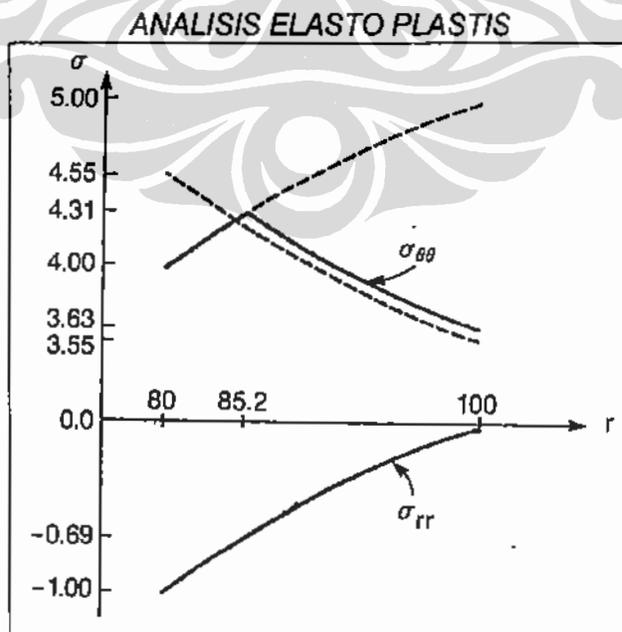
**Contoh – 3**

Untuk kasus ini kita menggunakan elemen eksak elastik dan elemen plastis untuk analisis elastoplastis terhadap pipa yang sama. Karena elemen-elemen ini adalah eksak, kita memerlukan hanya satu elemen elastis dan satu elemen plastis. Konstanta  $k$  diasumsikan = 1,25 (satuan tegangan), tekanan internal dan eksternal ditetapkan masing-masing = 1 dan 0. Untuk memeriksa kondisi tersebut di dalam pipa apakah seluruhnya elastis atau seluruhnya plastis, mula-mula dipergunakan elemen yang sangat kecil dan sangat besar. Untuk memeriksa kondisi elastis, elemen kecil yang

ditempatkan dekat permukaan dalam, adalah elemen plastis dan elemen yang lebih besar adalah elastis. Untuk kondisi plastis murni dipergunakan diskritisasi kebalikannya, yaitu elemen elastis yang kecil ditempatkan dekat permukaan luar. Dari nilai tegangan dihitung pada setiap elemen, pemeriksaan dilakukan untuk memeriksa kecocokan dengan kondisi yield dan berdasarkan informasi ini posisi interface berubah-ubah. Sesudah beberapa iterasi interface ditemukan pada node-2, seperti di tunjukkan dalam tabel 4, distribusi tegangan feinal ditunjukkan oleh garis solid pada gambar 3.

Tabel 4  
Kasus Elasto-plastic

VARIABLE	NODE		
	1	2	3
$r$	$0.800\ 000\ 0 \times 10^{+2}$	$0.851\ 9287 \times 10^{+2}$	$-0.100\ 000\ 0 \times 10^{+3}$
$\alpha$	$-0.800\ 000\ 0 \times 10^{+2}$	$-0.584\ 0349 \times 10^{+2}$	0.0
$\sigma_{rr}$	$-0.100\ 000\ 0 \times 10^{+1}$	$-0.685\ 5444 \times 10^0$	0.0
$(\sigma_{\theta\theta})_{avg}$	$0.400\ 000\ 0 \times 10^{+1}$	$0.431\ 4456 \times 10^{+1}$	$0.3628916 \times 10^{+1}$



Gambar 3. Distribusi tegangan pada pipa plastis parsial

## 5. Kesimpulan

Telah didiskusikan dan dibahas analisis elastoplastis pipa tebal dengan model elemen hingga secara linier dan secara eksak sekaligus pengujiannya. Dengan analisis ini, *interface* antara zona elastis dan plastis suatu pipa dengan tekanan dalam telah dikaji.

## Referensi

1. Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N. (1970), *Theory of Elasticity*, McGraw Hill, New York.
2. Johnson, W. and Mellor, P.B. (1962), *Plasticity for Engineer*, Van Nostrand, London.
3. Spencer, G.C. (1968), *Introduction to Plasticity*, Chapman Hall, London.
4. Slater, R.A. (1977), *Engineering Plasticity*, John Wiley, Chichester.

