MAKARA, SAINS, VOL. 10, NO. 2, NOVEMBER 2006: 63-68

MENENTUKAN NILAI EKSTREM SUKU BANYAK TERTENTU DENGAN PERTIDAKSAMAAN RATA-RATA

Kasiyah M. Junus

Fakultas Ilmu Komputer, Universitas Indonesia, Depok 16424, Indonesia

E-mail: kasiyah@cs.ui.ac.id

Abstrak

Suku banyak merupakan fungsi yang kontinu dan terdiferensial di himpunan bilangan nyata *R*. Sehingga, pada setiap interval tertutup, suku banyak mencapai nilai maksimum dan minimum pada titik stasioner atau titik batas interval. Cara yang biasa dipakai untuk menentukan nilai ekstrem suku banyak adalah metode Kalkulus dengan menggunakan turunan. Pada makalah ini dibahas metode menentukan nilai ekstrem suku banyak tertentu pada interval yang diberikan dengan menggunakan pertidaksamaan rata-rata aritmetika dan geometri, yang merupakan pengembangan gagasan yang diajukan oleh de Alwis.

Abstract

A method for finding the extreme of certain polynomials using inequalities of the mean. A polynomial $y = \mathrm{p}(x)$ is continuous and differentiable on its domain R. Therefore, at any closed interval, the graph attains both the maximum and minimum values in the stationary points or the borders of the interval. The method commonly used to find the extremum is Calculus by using derivatives. This paper presents a method for finding the extremum of certain polynomials using inequalities of the mean based on de Alwis's work.

Keywords: *algebraic mean, geometric mean, inequalityof the means.*

1. Pendahuluan

Metode pencarian nilai-nilai ekstrem dengan menggunakan pertidaksamaan aljabar diperkenalkan di [1] dan dipresentasikan pada Asian Technological Conference on Mathematics tahun 2004 di Singapore. Pada sesi diskusi seorang peserta (mahasiswa dari Singapore) mengatakan bahwa metode serupa telah menjadi bahan diskusi di kelas Kalkulus yang dikutinya. Maka, kemungkinan metode ini dikembangkan juga di tempat-tempat lain secara independen.

Pada tulisannya, de Alwis menerapkan prosedur ini pada 3 kelas suku banyak, yaitu kuadrat, beberapa suku banyak yang merupakan contoh khusus dari suku banyak berbentuk , dan tanpa membahas rumus umumnya. Dalam makalah ini disajikan pengembangan metode tersebut pada suku banyak dalam bentuk umum. Selain itu dibahas juga suku banyak berbentuk .

Karena pembahasan dilakukan pada suku banyak bentuk umum, maka hasilnya berlaku untuk semua suku banyak yang mempunyai bentuk yang sama. Namun, asumsi yang harus dipenuhi menjadi lebih ketat. Sehingga, dalam hal ini, metode hanya berlaku pada interval tertentu dimana syarat dipenuhi.

2. Metode Penelitian

Penilitian dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut. Pertama, dilakukan studi pustaka. Hasil yang diajukan pada makalah acuan diperiksa polanya untuk melakukan konjektur, generalisasi, dan penerapan pada bentuk lain untuk

MAKARA, SAINS, VOL. 10, NO. 2, NOVEMBER 2006: 63-68

memperoleh hasil yang baru. Selanjutnya, hasil yang diperoleh dibandingkan dengan hasil yang diperoleh dengan metode Kalkulus [3]. Sedangkan tahap eksperimental tidak dilakukan dalam penelitian ini.

3. Hasil dan Pembahasan

1. Pertidaksamaan Rata-rata

Rata-rata aritmetika dari barisan bilangan-bilangan nyata didefinisikan sebagai

1

dan rata-rata geometrisnya didefinisikan sebagai

2

Jika bilangan-bilangan tersebut kesemuanya positif, maka berlaku pertidaksamaan rata-rata, seperti diberikan pada teorema berikut ini.

Teorema:
Jika adalah barisan bilangan-bilangan nyata positif maka berlaku

3

Bukti teorema dengan menggunakan induksi matematika diberikan di [2]. Bukti geometris untuk $n = 2$ disajikan di [1]

Syarat positif pada teorema di atas adalah syarat perlu. Oleh karena itu, dalam menerapkan metode ini syarat tersebut menjadi kendala yang harus dipenuhi. Dalam implementasinya, kendala tersebut berupa batasan interval.

Garis besar metode yang dibahas pada makalah ini adalah sebagai berikut. Diberikan suku banyak. Pertama, dibentuk barisan yang terdiri atas faktor-faktor suku banyak atau hasil kali faktor dengan skalar atau hasil pemangkatan faktor dengan bilangan bulat sebagai suku-suku positif barisan sedemikian hingga rata-rata aritmetika dari barisan yang terbentuk berupa suatu konstanta (bilangan nyata), atau tidak memuat peubah. Selain itu, harus dijamin bahwa rata-rata geometrisnya mudah diubah kembali ke suku banyak awal. Rata-rata geometris diubah menjadi suku banyak awal dengan suatu operasi. Operasi yang sama harus dilakukan juga pada rata-rata aritmetika, dengan tidak lupa mempertahankan sifat pertidaksamaannya. Dengan cara ini akan diperoleh batas atas atau batas bawah dari nilai suku banyak di interval yang sesuai. Titik maksimum atau minimum tercapai ketika persamaan dipenuhi. Dengan demikian, titik ekstrem ditemukan.

Perlu diperhatikan bahwa setiap faktor terlibat tepat satu kali dalam salah satu bentuk yang telah disebutkan tadi. Suku-suku barisan tersebut bernilai positif diperoleh dengan memilih interval yang sesuai.

2. Fungsi Kuadrat

Secara umum, fungsi kuadrat dapat disajikan sebagai dengan a, b, dan c merupakan bilangan-bilangan nyata. Jika $a > 0$ maka grafik fungsi berbentuk parabola terbuka ke atas, sehingga mempunyai satu nilai minimum global. Apabila diketahui juga bahwa $b = 0$, maka nilai minimum tersebut dicapai ketika $x = 0$, titik terendah parabola adalah $(0, c)$.

Jika adalah titik terendah dari kurva , maka titik terendah dari kurva adalah titik . Selanjutnya, jika adalah titik terendah dari , maka adalah titik tertinggi dari . Dengan demikian, cukup dibahas fungsi kuadrat berbentuk dengan $a >$ 0 .

Untuk mencakup semua kemungkinan, perlu dibedakan dalam dua kasus, yaitu untuk $b > 0$ dan $b < 0$.

Kasus 1: b > 0
Faktor dari adalah x dan $ax + b$. Untuk membuat jumlahan kedua faktor berupa konstanta, maka faktor pertama x dikalikan dengan $-a$. Kedua faktor bernilai positif untuk nilai-nilai x yang memenuhi $-b/a < x < 0$. Berdasarkan pertidaksamaan aljabar, maka untuk $-b/a < x < 0$ berlaku

atau

4

Nilai minimum dari suku banyak adalah $-b^2/(4a)$ dicapai ketika persamaan dipenuhi, yaitu $-ax = ax + b$, dipenuhi jika dan hanya jika $x = -b/2a$.

Kasus 2: b < 0,
Untuk membuat rata-rata aritmetika dari dua faktor , yaitu x dan $ax + b$ berupa konstanta ada dua cara. Pertama, faktor yang pertama x dikalikan dengan $-a$. Namun, kita ketahui bahwa $-ax$ dan $ax + b$ tidak mungkin keduanya bersama-sama positif. Dengan kata lain, sistem persamaan $-ax > 0$ dan $ax + b > 0$ tidak konsisten untuk $b < 0$. Oleh karena itu, dipilih cara yang ke dua, yaitu, faktor pertama x dikalikan a, dan faktor kedua $ax + b$ dikalikan -1. Barisan yang dibentuk adalah ax dan seperti disarankan oleh de Alwis [1]. Kedua suku bernilai positif untuk . Berdasarkan pertidaksamaan aljabar, maka untuk nilai-nilai x yang memenuhi berlaku

atau

5

Nilai minimum dari suku banyak adalah $-b^2/(4a)$ dicapai ketika persamaan dipenuhi, yaitu ketika $ax =$ yaitu jika $x = -b/(2a)$.

Dari kedua kasus di atas disimpulkan bahwa untuk $a > 0$ dan untuk setiap nilai x berlaku:

6

Nilai minimum fungsi kuadrat tersebut dicapai ketika $x = -b/(2a)$. Hasil yang sama kita peroleh lewat perhitungan menggunakan turunan. Titik minimum dicapai ketika garis singgung pada kurva horisontal, atau $dy/dx = 2ax + b = 0$, yang dicapai untuk $x = -b/(2a)$. Jika nilai ini dimasukkan pada f, maka diperoleh nilai minimum, yaitu $f_{\min} =$,

sesuai dengan perhitungan dengan menggunakan pertidaksamaan aljabar.

3. Suku banyak berbentuk

Dalam [1] dibahas beberapa contoh tertentu suku banyak yang dapat dibawa ke bentuk untuk nilai-nilai x yang memenuhi dan . Pada makalah ini akan diturunkan rumus umum untuk menentukan nilai ekstrem suku banyak di atas.

Seperti pada metode menentukan nilai ekstrem fungsi kuadrat, pertama-tama dibentuk barisan terdiri atas faktor-faktor bernilai positif dari suku banyak di atas sedemikian hingga jumlahan aritmetikanya berupa suatu konstanta. Hal tersebut dapat diperoleh dengan memangkatkan fungsi dengan n dilanjutkan dengan menyesuaikan koefisien dari suku x^n.

=

Setiap faktor x^n dikalikan dengan kn/m untuk membentuk barisan bilangan positif yang rata-rata aritmetikanya merupakan konstanta. Barisan yang diperoleh adalah

dengan dan k, m, n bilangan-bilangan asli. Karena setiap suku barisan bernilai nyata dan positif, maka berlaku pertidaksamaan aljabar

Setelah disederhanakan diperoleh

7

kesamaannya dipenuhi jika dan hanya jika

8

yaitu untuk nilai x berikut ini.

MAKARA, SAINS, VOL. 10, NO. 2, NOVEMBER 2006: 63-68

9

Jika nilai x di atas dimasukkan ke fungsi f maka diperoleh nilai ekstrem f pada pada interval . Nilai ekstrem tersebut dapat juga diperoleh dengan mengambil kesamaan dari pertidaksamaan geometri dengan dengan memangkatkan kedua ruas dengan $m + kn$ untuk menghilangkan akar di ruas kanan.

Ruas kanan dikembalikan ke bentuk suku banyak awal. Sehingga pertidaksamaan berubah bentuk menjadi

10

Pertidaksamaan di atas menunjukkan bahwa nilai maksimum global f pada interval dengan $a > 0$ adalah

11

Dengan perhitungan Kalkulus menggunakan turunan, nilai ekstrem dicapai ketika $f'(x) = 0$. Turunan f terhadap x adalah

=

Persamaan $f'(x) = 0$ dipenuhi untuk nilai-nilai x berikut ini: . Selanjutnya, untuk menentukan jenis titik ekstremnya (maksimum atau minimum) dilakukan uji turunan kedua, atau dengan melihat perubahan nilai $f'(x)$ di kiri dan di kanan titik stasioner tersebut.

Turunan kedua *f* adalah

Jika nilai-nilai x pembuat nol dimasukkan ke , maka diperoleh , . Kelengkungan kurva berubah di $x = 0$ dan . Karena di titik-titik tersebut garis singgung pada kurva adalah horisontal dan kelengkungan kurva berubah, maka dipastikan titik-titik tersebut bukanlah titik ekstrem.

Sedangkan bisa positif maupun negatif tergantung pada nilai k, m, dan n. Jika nilainya negatif, maka di titik tersebut kurva mencapai titik maksimum. Sedangkan jika nilainya positif, maka jenis ekstremumnya adalah minimum. Perlu diselidiki lebih lanjut untuk menentukan jenis ekstremumnya. Hal ini cukup rumit karena ekspresi f'' cukup kompleks dan harus mencakup semua kemungkinan tanda (positif atau negatif) nilai k, m, dan n.

3.4. Suku banyak

Untuk suku banyak di atas, pembahasan dibatasi untuk (a - x)< 0 dan (b - x)>0 untuk menjamin semua suku-suku barisan bilangan yang dibentuk adalah positif sehingga pertidaksamaan aljabar dipenuhi. Untuk mempermudah pembahasan kita ambil $n > m$. Untuk $m > n$, penyelesainnya serupa.

Diberikan fungsi

12

Suku dikalikan dengan sehingga untuk (x – a) > 0 dan (b - x) > 0, kita mempunyai barisan bilangan-bilangan nyata positif

Sehingga, pertidaksamaan aljabar berikut ini dipenuhi.

Setelah disederhanakan diperoleh

Rata-rata geometri di bawa ke suku banyak semula dengan memangkatkannya dengan m+n.

13

Jadi, nilai maksimum dari f adalah

yang dicapai jika kesamaan dipenuhi, yaitu

MAKARA, SAINS, VOL. 10, NO. 2, NOVEMBER 2006: 63-68

Sehingga, titik ekstrem global pada interval tersebut adalah

14

Dengan menggunakan turunan, diperoleh titik-titik stasioner untuk $x = a$, $x = b$, dan .

Untuk mengetahui jenis ekstremnya dapat dilihat nilai turunan keduanya atau melihat perubahan nilai f *'.*

3.5. Suku banyak

Diberikan . Untuk kita mempunyai barisan bilangan-bilangan nyata positif yang suku-sukunya memenuhi salah satu dari dua bentuk, yaitu sebanyak k dan l suku berturut-turut. Oleh karena itu, pertidaksamaan aljabar dipenuhi. Selanjutnya, suku dikalikan dengan l/k untuk memperoleh deret aritmetika barisan yang tidak mengandung x.

Untuk memperoleh suku banyak mula-mula, kedua ruas dipangkatkan dengan $k+l$ kemudian dikalikan dengan k, sehingga diperoleh

Artinya, pada interval dimana persyaratan dipenuhi, maka

merupakan batas atas terkecil dari nilai fungsi. Nilai tersebut dicapai oleh fungsi jika kesamaan di atas dipenuhi, yaitu jika dan hanya jika

jika dan hanya jika

15

Dengan Kalkulus, nilai ekstrem diperoleh dengan menentukan nilai nol dari f'.

Calon titik-titik ekstrem antara lain adalah x = 0, x = a, x = b. Nilai-nilai ersebut membuat ' bernilai 0, sehingga pada titik-titik tersebut kelengkungan kurva berubah. Jadi, titik-titik tersebut merupakan titik belok dan bukan titik ekstrem. Calon yang lain cukup sulit diperoleh dengan menyelesaikan persamaan di atas untuk x. Untuk menentukan jenis titik ekstremnya, fungsi perlu diturunkan sekali lagi kemudian nilai x pada turunan keduanya. Jika turunan keduanya positif, maka titik tersebut merupakan titik minimum; dan jika turunan keduanya negatif maka merupakan ekstrem maksimum. Terlihat bahwa untuk fungsi di atas, metode Kalkulus melibatkan turunan fungsi yang jauh lebih rumit dibandingkan ekspresi matematika yang muncul pada penerapan pertidaksamaan aljabar.

3. Kesimpulan

Secara umum, jika suku banyak terdiri atas dua macam faktor, maka nilai maksimum atau minimum fungsi pada interval tertentu dicapai ketika kedua faktor tersebut bernilai sama (setelah dilakukan manipulasi untuk dapat menerapkan metode tersebut). Metode yang dibahas pada makalah ini lebih sederhana dibandingkan dengan metode Kalkulus untuk suku-suku banyak yang terdiri atas banyak faktor, karena rumitnya mencari nilai nol dari turunan pertama dan menentukan tanda dari turunan keduanya. Metode yang dibahas pada makalah mempunyai keterbatasan, yaitu berlaku pada interval tertentu saja karena syarat positif dari suku-suku barisan harus dipenuhi.

Masalah yang masih terbuka antara lain bagaimana menerapkan metode tersebut pada suku-suku banyak dengan bentuk-bentuk lain, atau melibatkan lebih dari satu peubah bebas. Tantangan yang akan dihadapi adalah penentuan batasan agar syarat positif suku-suku barisan dipenuhi.

Daftar Acuan

[1] de Alwis, Tilak (2004) Maximizing or Minimizing Polynomials Using Algebraic Inequalities, Proc. 9th Asian Technological Conference on Mathematics 2004, Singapore Dec 2004, p 88-97, ATCM Inc.

[2] Sanchez, Pedro, Proof of arithmetic-geometric means inequality, http://planetmath.org/encyclopedia/ProofOfArithmeticGeometricHarmonicMeansInequality.html, (27 September 2006)

[3] Edwards, C. Henry dan David E. Penney (1998) *Calculus with Analytic Geometry* 5th Ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.