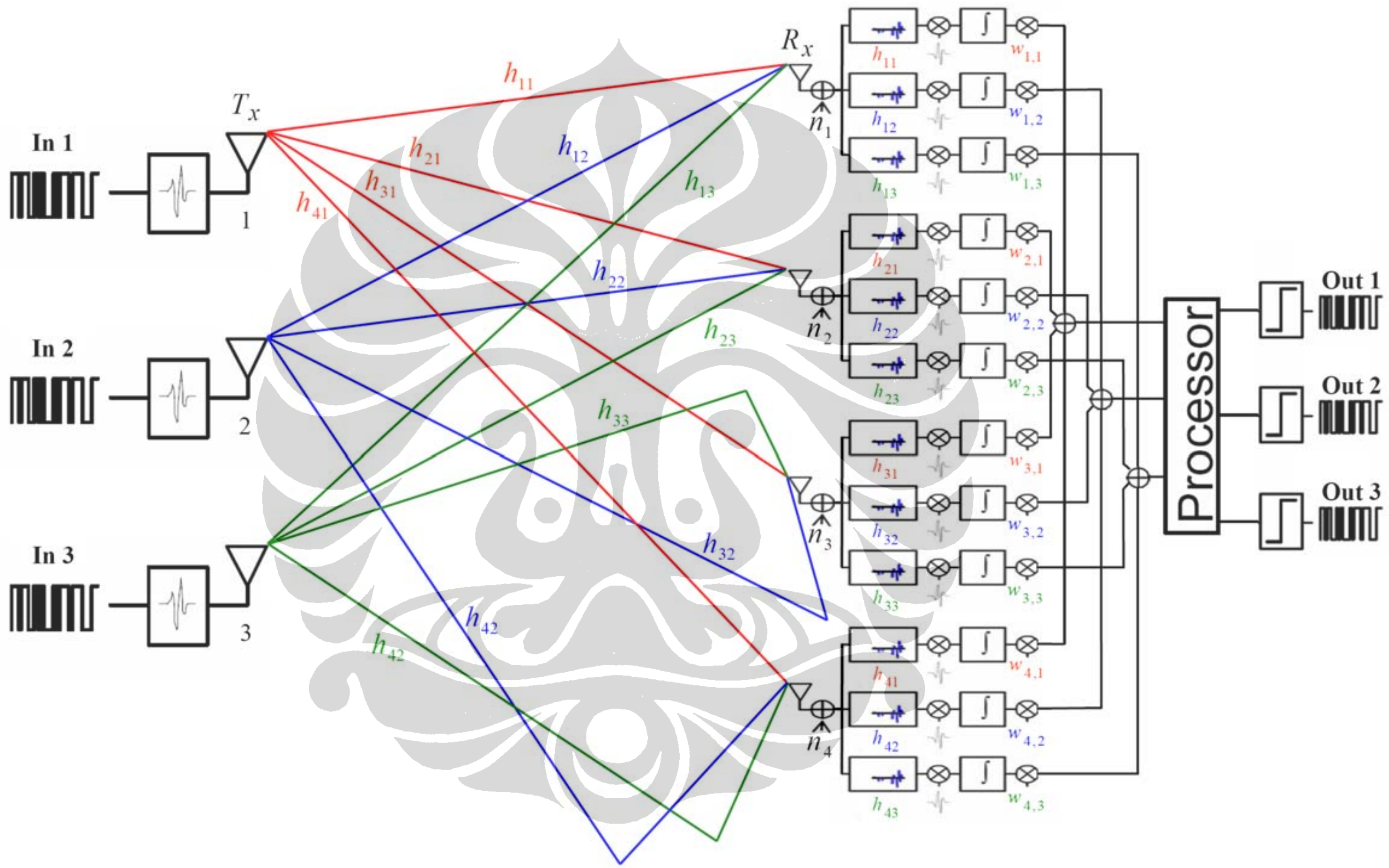
BAB V

ANALISA NUMERIK PERFORMANSI MIMO OFDM SISTEM KOMUNIKASI UWB

Dalam rangka meningkatkan kapasitas *throughput* dan mengurangi *error rate*, MIMO OFDM lebih memilih untuk mengeksploitasi daripada mengeliminasi fenomena alam seperti propagasi *multipath*. Sehingga teknologi ini sangat menjanjikan bagi peningkatan kapasitas transfer data yang besar, baik untuk sistem komunikasi nirkabel *outdoor* maupun *indoor*, seperti UWB. Peranan daya transmisi, korelasi pada pemodelan kanal, dan konfigurasi antara elemen-elemen antena *transmitter* dan *receiver* akan sangat menentukan efisiensi sistemnya, termasuk dalam memperluas daerah cakupan. Untuk mempermudah analisa matematis dalam mendekomposisi kanal *flat* sistem komunikasi UWB MIMO OFDM ke bentuk ekuivalen kanal spasial paralel independen, maka digunakan pendekatan empiris berbasis operasi SVD yang sangat berguna dalam menghitung kapasitas *throughput*, SNR dan BER perkanal spasial maupun untuk keseluruhan sistem.

5.1 Solusi Matematis Matriks Respon Kanal Berbasis SVD

Bila entri-entri matriks respon kanal H yang merupakan penguatan kompleks dari kanal *multipath* antara antena *transmitter* ke-*j* dan *receiver* ke-*i*, $h_{ij}^{f}(t) = \left|h_{ij}^{f}(t)\right| e^{j\varphi_{ij}^{f}(t)}$ (lihat gambar 5.1), adalah variabel acak terdistribusi *Rayleigh* yang dibangkitkan oleh konfigurasi tiga antena *transmitter* dan empat *receiver*, diasumsikan sama dengan $\mathrm{H} = \begin{bmatrix} 2 & 17/10 & 3/5 \\ 2 & 1/10 & 9/5 \\ 2 & -17/10 & -3/5 \\ 2 & -1/10 & -9/5 \end{bmatrix}$, maka tentukanlah besar daya penguatan kanal pada *receiver* dari sistem komunikasi UWB MIMO OFDM tersebut? $\left|h_{ij}^{f}(t)\right|$ adalah magnitude penguatan kanal antara pasangan



Gambar 5.1 Skema transmisi MIMO OFDM sistem komunikasi UWB dengan konfigurasi antena R_xT_x 4x3

antena *transmitter* dan *receiver*. $\varphi_{ij}^{f}(t)$ adalah besar fase penguatan kanal pada *receiver* akibat refleksi. Baik *transmitter* maupun *receiver,* keduanya saling berbagi informasi mengenai informasi respon kanal CSI. Gunakanlah analisa matematis berbasis algoritma SVD!

Bila ditinjau dari sisi *transmitter*, maka matriks korelasi yang harus dibentuk terlebih dahulu adalah $\mathrm{H}^{h}\mathrm{H}$ dimana matriks unitaris yang diperoleh dari hasil komputasi adalah V. Namun bila ditinjau dari sisi yang berlawanan, maka matriks korelasi yang harus dibentuk adalah HH^{h}, dimana matriks unitaris yang diperoleh dari hasil komputasi adalah U. Perlu diketahui bahwa $h_{ij}^{f} = \alpha_{ij}^{f} \cdot e^{-j2\pi(d_{ij}/\lambda_c^f)}$, dimana α_{ij}^{f} adalah atenuasi kanal *multipath* yang diasumsikan sama pada semua pasangan antena *transmitter* dan *receiver*, d_{ij} adalah jarak antara antena *transmitter* dan *receiver*, dan λ_c^f adalah panjang gelombang *carrier* dari sinyal yang diterima oleh *receiver*.

Berikut ini diuraikan algoritma SVD dari penyelesaian contoh kasus di atas. Dimensi matriks respon kanal haruslah sama dengan dimensi dari matriks–matriks unitaris yang mendiagonalisasinya. $\mathrm{H}_{(4x3)} = \mathrm{U}_{(4x4)}\Sigma_{(4x3)}V_{(3x3)}^{h}$, maka:

(i). Buat matriks korelasi $\mathrm{H}^{h}\mathrm{H}$ untuk dapatkan nilai eigen λ_i melalui determinan persamaan polinomial $\left(\mathrm{H}^{h}\mathrm{H} - \lambda I\right)x = 0$, dimana i = 1, 2, … , R_0.

$$\mathrm{H}^{h} = \begin{bmatrix} 2 & 17/10 & 3/5 \\ 2 & 1/10 & 9/5 \\ 2 & -17/10 & -3/5 \\ 2 & -1/10 & -9/5 \end{bmatrix}_{(4x3)}^{h} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 17/10 & 1/10 & -17/10 & -1/10 \\ 3/5 & 9/5 & -3/5 & -9/5 \end{bmatrix}_{(3x4)}$$

$$\mathrm{H}^{h}\mathrm{H} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 17/10 & 1/10 & -17/10 & -1/10 \\ 3/5 & 9/5 & -3/5 & -9/5 \end{bmatrix}_{(3x4)} \begin{bmatrix} 2 & 17/10 & 3/5 \\ 2 & 1/10 & 9/5 \\ 2 & -17/10 & -3/5 \\ 2 & -1/10 & -9/5 \end{bmatrix}_{(4x3)}$$

$$\mathrm{H}^{h}\mathrm{H} = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 29/5 & 12/5 \\ 0 & 12/5 & 36/5 \end{bmatrix}_{(3x3)}$$

$$\det\left(H^hH-\lambda I\right)=\begin{vmatrix} 16-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{29}{5}-\lambda & \frac{12}{5} \\ 0 & \frac{12}{5} & \frac{36}{5}-\lambda \end{vmatrix}=(16-\lambda)\left(\frac{29}{5}-\lambda\right)\left(\frac{36}{5}-\lambda\right)-\left\{\frac{12}{5}\cdot\frac{12}{5}\cdot(16-\lambda)\right\}$$

$$0=(16-\lambda)\left(\frac{1044}{25}-13\lambda+\lambda^2\right)-\frac{2304}{25}+\frac{144}{25}\lambda$$

$$0=\frac{16704}{25}-\frac{1044}{25}\lambda-208\lambda+13\lambda^2-16\lambda^2-\lambda^3-\frac{2304}{25}+\frac{144}{25}\lambda$$

$$0=-\lambda^3-3\lambda^2-\left(\frac{900}{25}+208\right)\lambda+\frac{14405}{25}$$

$$0=-\lambda^3-3\lambda^3-244\lambda+576=\lambda^3+3\lambda^3+244\lambda-576$$

$$\begin{array}{r|l} & (\lambda^2\text{ -}13\lambda\text{ -}36) \\ \hline (\lambda-16) & \lambda^3+3\lambda^2+244\lambda-576 \\ & \lambda^3-16\lambda^2 \\ \hline & 0-13\lambda^2+244\lambda \\ & -13\lambda^2+208\lambda \\ \hline & 0+36\lambda-576 \\ & 36\lambda-576 \\ \hline & 0\ +\ 0 \end{array}$$

$$0=(\lambda-16)(\lambda^2\text{ -}13\lambda\text{ -}36)\quad 0=(\lambda-16)(\lambda-9)(\lambda-4)$$

$$\lambda_1=16,\qquad \lambda_2=9,\qquad \lambda_3=4.$$

(ii). R_0 adalah $\mathrm{rank}(H^hH)\le\min\{4,3\}=3$, atau banyaknya nilai eigen yang berbilangan tak nol dari matriks korelasi H^hH, yaitu $\lambda_1>\lambda_2>\lambda_3>0$.

(iii). Matriks unitaris V dibentuk oleh elemen-elemen vektor *weight* $w_t=(w_{t,1}\ w_{t,2}\ w_{t,3})$ dari matriks korelasi H^hH yang diperoleh dengan mensubsitusi masing-masing nilai eigen ke dalam persamaan polynomialnya.

* untuk $\lambda_1=16$

$$\begin{bmatrix} 16-16 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{29}{5}-16 & \frac{12}{5} \\ 0 & \frac{12}{5} & \frac{36}{5}-16 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-15}{5} & \frac{12}{5} \\ 0 & \frac{12}{5} & \frac{-44}{5} \end{bmatrix}\ \begin{matrix} H_2^5 \\ \Rightarrow \\ H_3^5 \end{matrix}\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 12 \\ 0 & 12 & -44 \end{bmatrix}$$

$$H_2^{1/3}\Downarrow H_3^{1/4}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 4 \\ 0 & 3 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 4 \\ 0 & 3 & -11 \end{bmatrix}$$

karena semua elemen kolom pertama dari matriks hasil eliminasi Gaussian adalah bernilai nol, maka x_1 merupakan bilangan sembarang tetapi bukan nol, misalnya $x_1 = c$ dan sebaliknya dimisalkan bila $x_3 = 0$, maka

$$\begin{array}{l} -5x_2 + 4x_3 = 0 \\ \underline{\;3x_2 - 11x_3 = 0\;} + \\ -2x_2 - 7x_3 = 0 \end{array}$$

diperoleh $x_2 = (-7/2)x_3 = (-7/2)(0) = 0$

sehingga vektor eigen $e_{t,1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Vektor eigen matriks korelasi $H^h H$ disebut juga sebagai vektor singular kiri matriks H. *Orthonormal* vektor eigen $e_{t,1}$ adalah merupakan vektor *weight* $w_{t,1}$, persamaan (4.23).

$$w_{t,1} = \frac{e_{t,1}}{|e_{t,1}|} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

* untuk $\lambda_2 = 9$

$$\begin{bmatrix} 16-9 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{29}{5}-9 & \frac{12}{5} \\ 0 & \frac{12}{5} & \frac{36}{5}-9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -16/5 & 12/5 \\ 0 & 12/5 & -9/5 \end{bmatrix} \begin{matrix} H_2^5 \\ \Rightarrow \\ H_3^5 \end{matrix} \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 12 \\ 0 & 12 & -9 \end{bmatrix}$$

$$H_2^{1/4} \Downarrow H_3^{1/3}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} H_3^2 \\ \Leftarrow \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

hasil eliminasi Gaussiannya adalah

$7x_1 + 0 + 0 = 0, \quad x_1 = 0$, dan

$-4x_2 + 3x_3 = 0$, bila $x_3 = c$, maka $x_2 = \frac{3}{4}c$

sehingga vektor eigen $\mathrm{e}_{t,2} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 0 \\ 3/4 \\ 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 3/4 \\ 1 \end{bmatrix}$

Orthonormal vektor eigen $\mathrm{e}_{t,2}$ disebut juga sebagai vektor *weight* $w_{t,2}$

$$w_{t,2} = \frac{\mathrm{e}_{t,2} - (w_{t,1}^{h} \cdot \mathrm{e}_{t,2})w_{t,1}}{\left|\mathrm{e}_{t,2} - (w_{t,1}^{h} \cdot \mathrm{e}_{t,2})w_{t,1}\right|} \qquad \mathrm{e}_{t,2} - (w_{t,1}^{h} \cdot \mathrm{e}_{t,2})w_{t,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3/4 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{h} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 3/4 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3/4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left|\mathrm{e}_{t,2} - (w_{t,1}^{h} \cdot \mathrm{e}_{t,2})w_{t,1}\right| = \sqrt{0^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$$

$$w_{t,2} = \frac{\mathrm{e}_{t,2} - (w_{t,1}^{h} \cdot \mathrm{e}_{t,2})w_{t,1}}{\left|\mathrm{e}_{t,2} - (w_{t,1}^{h} \cdot \mathrm{e}_{t,2})w_{t,1}\right|} = \frac{1}{5/4}\begin{bmatrix} 0 \\ 3/4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix}$$

* untuk $\lambda_3 = 4$

$$\begin{bmatrix} 16-4 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{29}{5}-4 & \frac{12}{5} \\ 0 & \frac{12}{5} & \frac{36}{5}-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 9/5 & 12/5 \\ 0 & 12/5 & 16/5 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{H}_2^5 \Downarrow \mathrm{H}_3^5$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 12 \\ 0 & 12 & 16 \end{bmatrix} \underset{\mathrm{H}_3^{1/4}}{\overset{\mathrm{H}_2^{1/3}}{\Rightarrow}} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \underset{\mathrm{H}_{32}^{(-1)}}{\overset{\mathrm{H}_1^{1/12}}{\Rightarrow}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

hasil eliminasi Gaussiannya adalah

$x_1 + 0 + 0 = 0, \quad \mathrm{x}_1 = 0$ dan

$3x_2 + 4x_3 = 0,$ bila $\mathrm{x}_3 = c,$ maka $\mathrm{x}_2 = -\frac{4}{3}c$

sehingga vektor eigen $\mathrm{e}_{t,3} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 0 \\ -4/3 \\ 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ -4/3 \\ 1 \end{bmatrix}$

Orthonormal vektor eigen $\mathrm{e}_{t,3}$ disebut juga sebagai vektor *weight* $w_{t,3}$

$$w_{t,3} = \frac{\mathrm{e}_{t,3} - (w_{t,2}^{h} \cdot \mathrm{e}_{t,3})_{t,2} - (w_{t,1}^{h} \cdot \mathrm{e}_{t,3})w_{t,1}}{\left|\mathrm{e}_{t,3} - (w_{t,2}^{h} \cdot \mathrm{e}_{t,3})w_{t,2} - (w_{t,1}^{h} \cdot \mathrm{e}_{t,3})w_{t,1}\right|}$$

$$w_{t,2}^{h} \cdot e_{t,3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix}^{h} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -4/3 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 - \frac{4}{5} + \frac{4}{5} = 0$$

$$w_{t,1}^{h} \cdot e_{t,3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{h} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -4/3 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$w_{t,3} = \frac{e_{t,3} - (0) w_{t,2} - (0) w_{t,1}}{\left| e_{t,3} - (0) w_{t,2} - (0) w_{t,1} \right|} = \frac{1}{\sqrt{(0)^2 + \left(\frac{-4}{3}\right)^2 + (1)^2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -4/3 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5/3} \begin{bmatrix} 0 \\ -4/3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian, matriks unitaris *non singular orthogonal (non singular orthonormal)* V yang dibentuk oleh matriks korelasi $H^h H$ adalah

$$V = w_t = (w_{t,1}\ w_{t,2}\ w_{t,3}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & -4/5 \\ 0 & 4/5 & 3/5 \end{bmatrix}_{3x3}$$ dan hermitiannya adalah

$$V^h = w_t^h = (w_{t,1}\ w_{t,2}\ w_{t,3})^h = (w_{t,1}^h\ w_{t,2}^h\ w_{t,3}^h) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & -4/5 \\ 0 & 4/5 & 3/5 \end{bmatrix}^h = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & 4/5 \\ 0 & -4/5 & 3/5 \end{bmatrix}_{3x3}$$

(iv). Matriks diagonal yang dibentuk oleh nilai *singular* dari matriks korelasi $H^h H$ adalah

$$\Sigma_{(4x3)} = \begin{bmatrix} \Sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{4x3} \qquad \Sigma_0 = \mathrm{diag}(\delta_1\ \delta_2\ \delta_3)$$

oleh karena $|\Sigma|^2 = \Lambda$, sesuai persamaan (4.19), (4.20) dan (4.21), (4.22), maka

$\Sigma = \Lambda^{1/2}$ atau sama dengan $\delta_{ij} = \sqrt{\lambda_{ij}}$ untuk i=j

$$\delta_1 = \delta_{11} = \sqrt{\lambda_{11}} = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{16} = 4$$

$$\delta_2 = \delta_{22} = \sqrt{\lambda_{22}} = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\delta_3 = \delta_{33} = \sqrt{\lambda_{33}} = \sqrt{\lambda_3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4x3} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4x3}$$

(v). Matriks unitaris U dapat dicari dengan menggunakan analogi persamaan (4.23), yaitu $\mathrm{H} = \sqrt{\lambda_i}\ w_{r,i}\ w_{t,i}^{h}$. Masing masing ke dua sisi bebasnya terlebih dahulu dipremultiplikasi dan postmultiplikasi dengan $w_{t,i}$ dan $1/\sqrt{\lambda_i}$, secara berurutan.

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\cdot \mathrm{H}\cdot w_{t,i} = \frac{\sqrt{\lambda_i}}{\sqrt{\lambda_i}}.w_{r,i}\cdot w_{t,i}^{h}\cdot w_{t,i}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\cdot \mathrm{H}\cdot w_{t,i} = (1)\cdot w_{r,i}\cdot(1)$$

$$w_{r,i} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\cdot \mathrm{H}\cdot w_{t,i}$$

$$w_{r,1} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\cdot \mathrm{H}\cdot w_{t,1} = \frac{1}{\sqrt{16}}\begin{bmatrix} 2 & 17/10 & 3/5 \\ 2 & 1/10 & 9/5 \\ 2 & -17/10 & -3/5 \\ 2 & -1/10 & -9/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$w_{r,2} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\cdot \mathrm{H}\cdot w_{t,2} = \frac{1}{\sqrt{9}}\begin{bmatrix} 2 & 17/10 & 3/5 \\ 2 & 1/10 & 9/5 \\ 2 & -17/10 & -3/5 \\ 2 & -1/10 & -9/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3/2 \\ 3/2 \\ -3/2 \\ -3/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

$$w_{r,3} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_3}}\cdot \mathrm{H}\cdot w_{t,3} = \frac{1}{\sqrt{4}}\begin{bmatrix} 2 & 17/10 & 3/5 \\ 2 & 1/10 & 9/5 \\ 2 & -17/10 & -3/5 \\ 2 & -1/10 & -9/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -4/5 \\ 3/5 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -50/50 \\ 50/50 \\ 50/50 \\ -50/50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

Dimensi yang membentuk matriks unitaris non singular orthogonal $\mathrm{U} = w_{r} = (w_{r,1}\ w_{r,2}\ w_{r,3}\ w_{r,4})$ adalah 4x4, maka perlu ada vektor *weight* $w_{r,4}$. Namun karena tidak terdapat nilai singular δ_4 atau $\sqrt{\lambda_4}$ dan $w_{t,4}$ sebagai komponen pembentuk vektor *weight* $w_{r,4} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_4}}\cdot \mathrm{H}\cdot w_{t,4}$, maka vektor *weight* tersebut dicari dengan menggunakan vektor *weight* satuan w_1 dengan formula

$$w_{r,4} = \frac{w_1 - (w_{r,3}^{h}\cdot w_1)w_{r,3} - (w_{r,2}^{h}\cdot w_1)w_{r,2} - (w_{r,1}^{h}\cdot w_1)w_{r,1}}{\left|w_1 - (w_{r,3}^{h}\cdot w_1)w_{r,3} - (w_{r,2}^{h}\cdot w_1)w_{r,2} - (w_{r,1}^{h}\cdot w_1)w_{r,1}\right|}$$

$$w_{r,4}=\frac{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}-\left\{\begin{bmatrix}-1/2\\1/2\\1/2\\-1/2\end{bmatrix}^h\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}-1/2\\1/2\\1/2\\-1/2\end{bmatrix}-\left\{\begin{bmatrix}1/2\\1/2\\-1/2\\-1/2\end{bmatrix}^h\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}1/2\\1/2\\-1/2\\-1/2\end{bmatrix}-\left\{\begin{bmatrix}1/2\\1/2\\1/2\\1/2\end{bmatrix}^h\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}1/2\\1/2\\1/2\\1/2\end{bmatrix}}{\left|\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}-\left\{\begin{bmatrix}-1/2\\1/2\\1/2\\-1/2\end{bmatrix}^h\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}-1/2\\1/2\\1/2\\-1/2\end{bmatrix}-\left\{\begin{bmatrix}1/2\\1/2\\-1/2\\-1/2\end{bmatrix}^h\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}1/2\\1/2\\-1/2\\-1/2\end{bmatrix}-\left\{\begin{bmatrix}1/2\\1/2\\1/2\\1/2\end{bmatrix}^h\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}1/2\\1/2\\1/2\\1/2\end{bmatrix}\right|}$$

$$w_{r,4}=\frac{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1/4\\-1/4\\-1/4\\1/4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1/4\\1/4\\-1/4\\-1/4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1/4\\1/4\\1/4\\1/4\end{bmatrix}}{\left|\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1/4\\-1/4\\-1/4\\1/4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1/4\\1/4\\-1/4\\-1/4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1/4\\1/4\\1/4\\1/4\end{bmatrix}\right|}=\frac{\begin{bmatrix}1/4\\-1/4\\1/4\\-1/4\end{bmatrix}}{\sqrt{(1/4)^2+(-1/4)^2+(1/4)^2+(-1/4)^2}}$$

$$w_{r,4}=\begin{bmatrix}1/2\\-1/2\\1/2\\-1/2\end{bmatrix}$$

Dengan demikian matriks unitaris non singular orthogonal U yang dibentuk oleh matriks korelasi H^hH adalah

$$U=w_r=(w_{r,1}\ w_{r,2}\ w_{r,3}\ w_{r,4})=\begin{bmatrix}1/2&1/2&-1/2&1/2\\1/2&1/2&1/2&-1/2\\1/2&-1/2&1/2&1/2\\1/2&-1/2&-1/2&-1/2\end{bmatrix}_{4x4}$$

Substitusikan matriks-matriks hasil dekomposisi ke dalam persamaan umum SVD

$$H_{(4x3)}=U_{(4x4)}\Sigma_{(4x3)}V^h_{(3x3)}$$

$$\begin{bmatrix}2&17/10&3/5\\2&1/10&9/5\\2&-17/10&-3/5\\2&-1/10&-9/5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/2&1/2&-1/2&1/2\\1/2&1/2&1/2&-1/2\\1/2&-1/2&1/2&1/2\\1/2&-1/2&-1/2&-1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&0&0\\0&3&0\\0&0&2\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3/5&-4/5\\0&4/5&3/5\end{bmatrix}$$

Uraian matematis di atas memperlihatkan solusi SVD dalam mendiagonalisasi matriks respon kanal akibat *multipath,* menjadi tiga ekuivalen kanal paralel independen. Besaran skalar faktor penguat sinyal yang diperoleh pada masing-masing kanal di *receiver,* secara berurutan mulai dari kanal spasial ber-*eigenpath* tertinggi adalah $\delta_1^f = 4$, $\delta_2^f = 3$, dan $\delta_3^f = 2$. Karena matriks respon kanal H adalah matriks acak, maka nilai-nilai egennya pun juga merupakan variable acak.

5.1 Komputasi SNR, BER, dan Kapasitas Throughput

Pengaruh penguatan kanal spasial yang lemah terhadap nilai kapasitas kanal transmisi dapat diketahui dengan cara menghitung SNR perkanal spasial. Bila diasumsikan kanal data pada contoh kasus sub bab 5.1 ada 48 sub kanal spasial, maka SNR perkanal spasial dapat dicari dengan menggunakan analogi persamaan (3.23).

$$SNR_{1\ average} = \frac{1}{48}\sum_{f=1}^{48}\frac{(\delta_1^f)^2}{\sigma^2} = 16\sigma^{-2}$$

$$SNR_{2\ average} = \frac{1}{48}\sum_{f=1}^{48}\frac{(\delta_2^f)^2}{\sigma^2} = 9\sigma^{-2}$$

$$SNR_{3\ average} = \frac{1}{48}\sum_{f=1}^{48}\frac{(\delta_3^f)^2}{\sigma^2} = 4\sigma^{-2}$$

SNR tersebut kemudian digunakan untuk mendapatkan ide tipe modulasi dan data rate yang tepat. Sedangkan BER perkanal spasialnya dikomputasi dengan menggunakan analogi persamaan (3.22), dimana performansi BER akan membaik seiring dengan pertambahan nilai SNR, dan terlihat pada gambar 5.2 performansi terbaik dimiliki oleh kanal spasial 1.

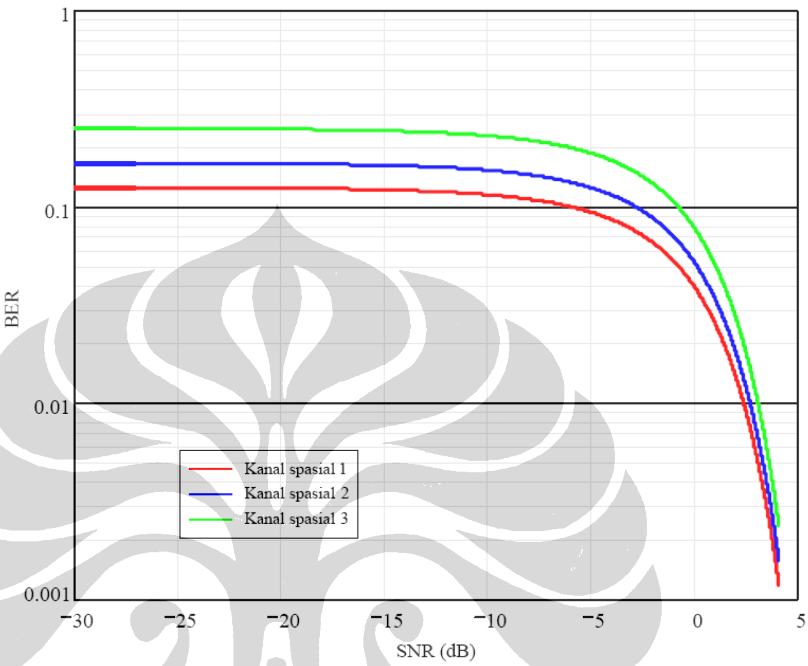
$$BER_{1\ average} = \frac{1}{48}\sum_{f=1}^{48} Q\,\frac{\delta_1^f}{\sigma} = 4Q\,\sigma^{-1}$$

$$BER_{2\ average} = \frac{1}{48}\sum_{f=1}^{48} Q\,\frac{\delta_2^f}{\sigma} = 3Q\,\sigma^{-1}$$

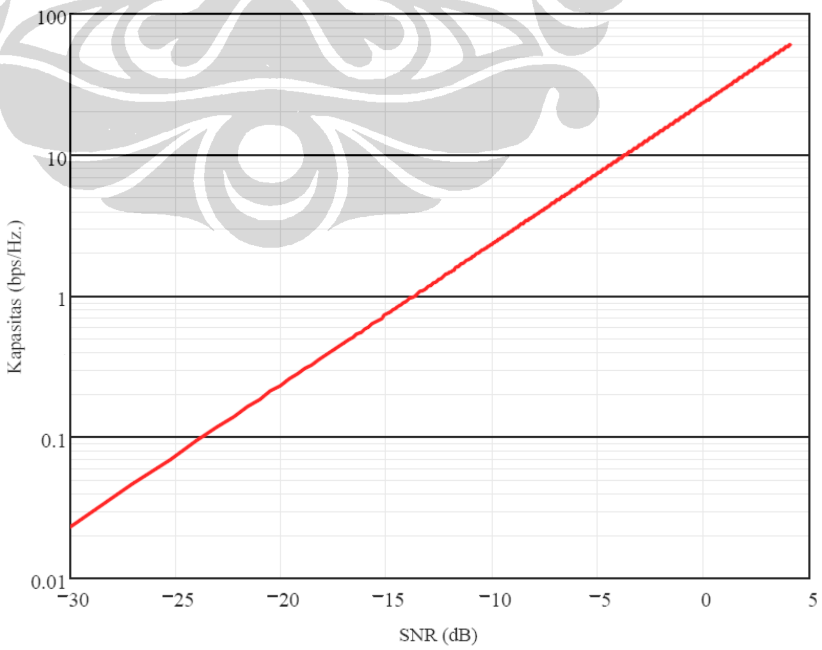
$$BER_{3\ average} = \frac{1}{48}\sum_{f=1}^{48} Q\,\frac{\delta_3^f}{\sigma} = 2Q\,\sigma^{-1}$$

BER seluruh sistem untuk semua kanal spasial dikomputasi dengan menggunakan analogi persamaan (3.24), yaitu

$$BER_{average} = \frac{1}{48}\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\sum_{f=1}^{48} Q\frac{\delta_i^{\,f}}{\sigma} = 3Q\,\sigma^{-1}$$



Gambar 5.2. Performansi BER versus SNR per kanal spasial



Gambar 5.3. Kapasitas *througput* versus SNR

Peningkatan kapasitas *throughput* yang juga menjadi tujuan dari penerapan teknik MIMO OFDM untuk sistem komunikasi UWB ini dihitung dengan menggunakan analogi persamaan (4.50).

$$\begin{aligned} C_{UWB\ MIMO\ OFDM} &\approx 16\ \mathrm{SNR}_0 \log_2 e \\ &\approx 16\ \mathrm{P}_0\, \sigma^{-2} \log_2 e \quad \text{bps/Hz.} \end{aligned}$$

Sehingga performansi *throughput* akan meningkat secara linier seiring dengan membesarnya nilai SNR, sebagaimana terlihat pada gambar 5.3. P_0 adalah daya total transmisi rata-rata pada antena *transmitter*, σ^2 adalah varians *noise* dan e adalah bilangan eksponesial.

5.1 Rank dan Subspasial Kanalisasi

Sebagai salah satu parameter kunci dalam evaluasi kapabilitas *multiplexing* kanal, *rank* sangat berpengaruh dalam menentukan jumlah ekuivalen kanal spasial paralel independen sistem MIMO OFDM. *Rank* tersebut dihitung berdasarkan banyaknya angka singular berbilangan tak nol dari hasil dekomposisi faktorisasi SVD, yang nilainya tak pernah lebih dari jumlah minimal antenna *receiver* atau *transmitter*, tergantung mana yang lebih sedikit, persamaan (3.7) hingga (3.9). Dari hasil komputasi contoh kasus sub bab 5.1, dibuktikan bahwa jumlah maksimal ekuivalen kanal paralel independen yang bisa dibentuk oleh sistem MIMO OFDM tersebut adalah sebanyak tiga kanal spasial.

Subspasial dari vektor kolom matriks respon kanal H di atas yang disimbolkan sebagai $\Re(\mathrm{H})$, adalah merupakan tiga kolom terdepan dari vektor singular kiri matriks H atau juga merupakan vektor *weight* $w_{\mathrm{r,i}}$ matriks korelasi $\mathrm{H}^{\mathrm{h}}\mathrm{H}$ untuk i = 1, 2, 3, atau juga sama dengan span matriks unitaris non singular orthogonal U_1 sesuai persamaan (4.14), yaitu

$$\Re(\mathrm{H}) = \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Spasial nol kanan (*the right null space*) matriks respon kanal H di atas juga disebut sebagai subspasial nol dari matriks respon kanal H dan disimbolkan sebagai $\aleph(\mathrm{H})$ adalah merupakan kolom-kolom setelah tiga kolom terdepan dari vektor singular kanan matriks H atau juga merupakan vektor *weight* $w_{t,i}$ matriks korelasi $\mathrm{H^hH}$ untuk indeks *i* lebih besar dari 3, atau juga sama dengan span matriks unitaris non singular *orthogonal* $\mathrm{V_2}$ sesuai persamaan (4.15). Karena dimensi matriks unitaris non singular *orthogona*l V hanya berorde (3x3) maka sistem tersebut tidak mempunyai spasial nol kanan, sehingga $\aleph(\mathrm{H}) = 0$.

Subspasial dari vektor baris matriks respon kanal H di atas juga disebut sebagai subspasial dari vektor kolom hermitian matriks respon kanal $\mathrm{H^h}$ dan disimbolkan sebagai $\Re(\mathrm{H^h})$, adalah merupakan tiga kolom terdepan dari vektor singular kanan matriks H atau juga merupakan vektor *weight* $w_{t,i}$ matriks $\mathrm{H^hH}$ untuk i = 1, 2, 3, atau juga sama dengan span matriks unitaris nonsingular orthogonal $\mathrm{V_1}$ sesuai persamaan (4.16), yaitu

$$\Re(\mathrm{H^h}) = span\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\3/5\\4/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-4/5\\3/5\end{bmatrix}\right\}.$$

Spasial nol kiri (*the leftt null space*) matriks respon kanal H di atas juga disebut sebagai subspasial nol dari hermitian matriks respon kanal $\mathrm{H^h}$, dan disimbolkan sebagai $\aleph(\mathrm{H^h})$ adalah merupakan kolom-kolom setelah tiga kolom terdepan dari vektor singular kiri matriks H atau merupakan vektor *weight* $w_{r,i}$ matriks $\mathrm{H^hH}$ untuk *i* = 4, atau juga sama dengan span matriks unitaris orthogonal $\mathrm{U_2}$ sesuai persamaan (4.17), yaitu

$$\aleph(\mathrm{H^h}) = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix}1/2\\-1/2\\1/2\\-1/2\end{bmatrix}\right\}$$