Bab III

GRUP FUNDAMENTAL PADA S^2, *TORUS*, P^2 dan *FIGURE EIGHT*

Sebelum mempelajari perbedaan pada grup fundamental S^2, *Torus*, P^2, dan *figure eight* terlebih dahulu akan dipelajari sifat dari grup fundamental masing-masing ruang tersebut. Subab 3.1 memberikan pembahasan mengenai grup fundamental dari S^2 yang bersifat trivial, sedangkan pembahasan pada Subab 3.2 bertujuan menunjukkan bahwa grup fundamental dari torus isomorfik dengan $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$. Grup fundamental dari P^2 memiliki order dua akan dipelajari pada Subbab 3.3 dan yang akan dibahas pada Subbab 3.4 adalah sifat grup fundamental *Figure eight* yang tidak abelian.

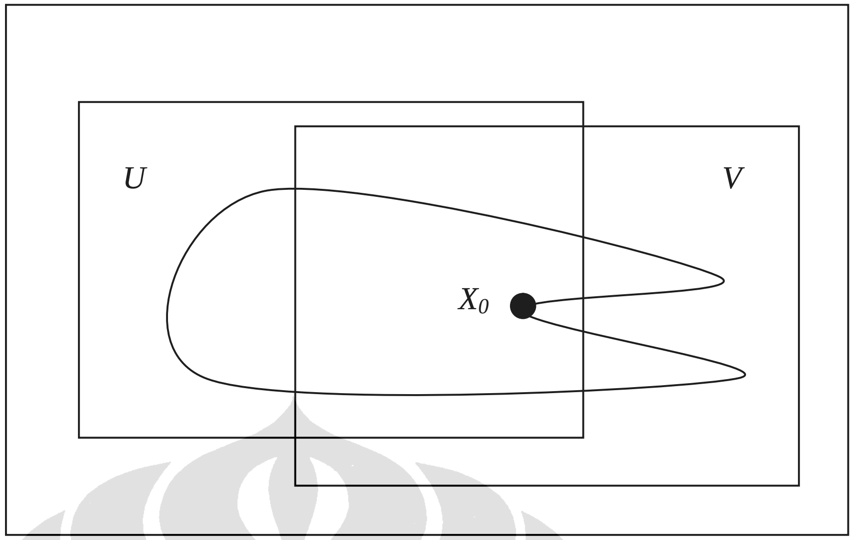
3.1 Grup Fundamental Pada S^2.

S^2 merupakan ruang topologi berbentuk kulit bola dengan jari-jari satu yang berpusat di titik $(0,0,0)$. Dalam subbab ini akan ditunjukkan bahwa S^2 bersifat terhubung sederhana, yang menurut Definisi 2.13, berakibat grup fundamentalnya bersifat trivial. Untuk membuktikan S^2 terhubung sederhana secara langsung, langkah yang harus ditempuh akan cukup rumit, teorema dibawah ini dapat membantu untuk membuktikan S^2 bersifat terhubung sederhana.

Teorema 3.1.1. Misalkan U dan V adalah himpunan buka di R^3, dan $X = U \cup V$. Misalkan pula $U \cap V$ tidak kosong dan terhubung lintasan. Jika U dan V terhubung sederhana, maka X terhubung sederhana.

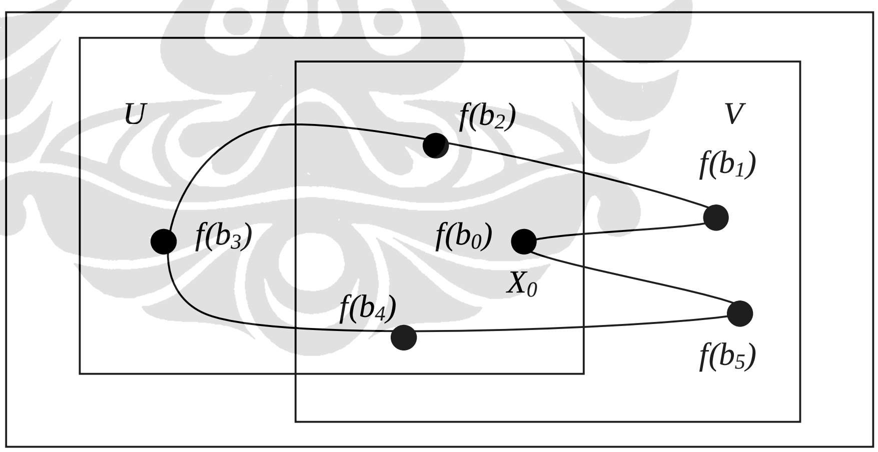
Bukti. Misalkan *a* dan *b* adalah sembarang titik di *X*. Jika *a* dan *b* anggota *U* maka terdapat lintasan yang menghubungkan *a* dengan *b* karena *U* terhubung lintasan. Misalkan *a* dan *b* anggota *V* maka terdapat lintasan yang menghubungkan *a* dengan *b* karena *V* terhubung lintasan. Misalkan *a* anggota *U* dan *b* anggota *V*. Misalkan c anggota $U \cap V$ maka terdapat lintasan yang menghubungkan *a* dengan *c*, misalkan bernama *h*, dan terdapat lintasan yang menghubungkan *b* dengan *c*, misalkan bernama *k*. Maka $h * k$ adalah lintasan yang menghubungkan *a* dengan *c*. Akibatnya X terhubung lintasan.

Selanjutnya akan ditunjukkan *X* terhubung sederhana dengan menunjukkan bahwa grup fundamental *X* adalah trivial, sesuai Definisi 2.13, dalam proses pembuktian ini akan disertakan beberapa gambar untuk membantu pemahaman. Misalkan x_0 anggota di $U \cap V$ dan *f* adalah *loop* yang berbasis di x_0. Jika *f* terletak seluruhnya di *U* atau *f* terletak seluruhnya di *V* maka $[f] = [e_{x_0}]$ karena *U* dan *V* terhubung sederhana. Jika terdapat bagian dari *f* yang berada pada $U - (U \cap V)$ dan pada $V - (U \cap V)$, seperti pada Gambar.3.1,



Gambar.3.1 Gambar *loop* f

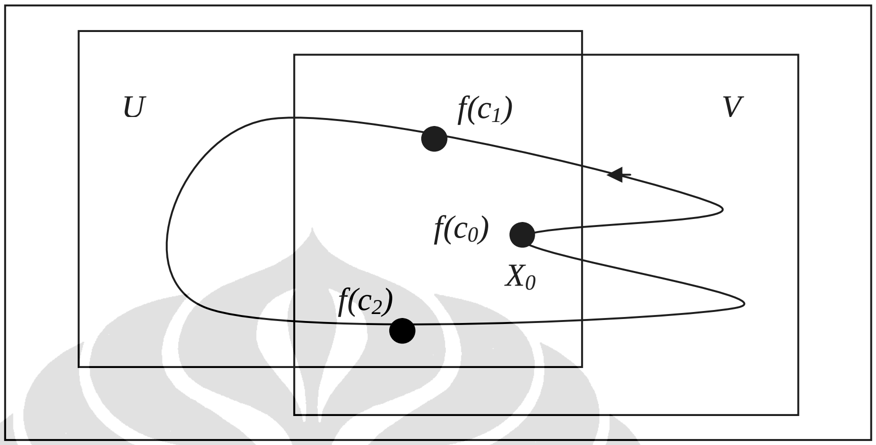
maka pilih $b_0, b_1, ..., b_n \in [0,1]$ dimana $0 = b_0 < b_1 < ... < b_n = 1$ sedemikian sehingga $f[b_{i-1}, b_i]$, yang merupakan bagian dari lintasan f, hanya terletak di U atau di V, seperti pada Gambar.3.2.



Gambar.3.2 Gambar *loop* f yang diberi indeks

Jika $f(b_i) \notin U \cap V$, maka b_i akan dihapus sehingga didapatkan indeks baru $c_0, c_1, ..., c_m \in [0,1]$ dimana $0 = c_0 < c_1 < ... < c_m = 1$ akibatnya

$f[c_{i-1},c_i], i=1,2,...,m$ hanya termasuk di U atau di V dan $f(c_i) \subset U \cap V, i=1,2,...,m$, seperti pada Gambar.3.3.

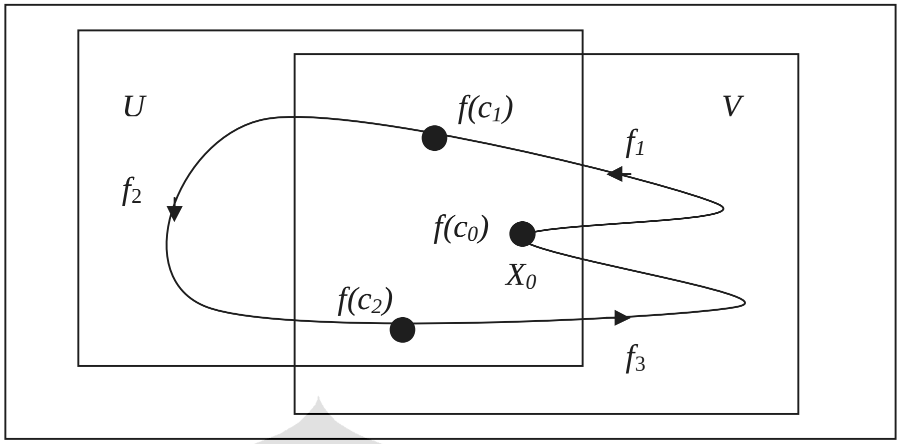


Gambar.3.3 Gambar *loop* f yang diberi indeks baru

Definisikan $f_n : I \to f[c_{n-1},c_n]$, n=1,2,...,m, f_n adalah lintasan dari $f(c_{n-1})$ ke $f(c_n)$ sehingga $f = f_1 * f_2 * ... * f_m$ dimana

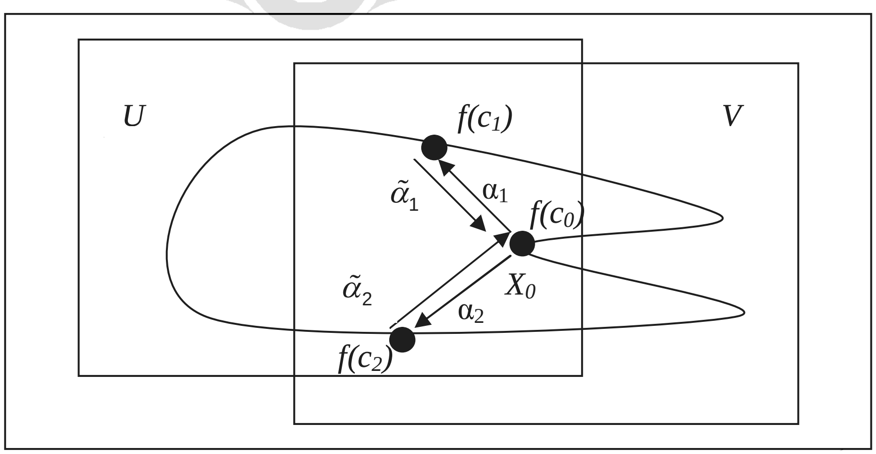
$$h(s)=\begin{cases} f_1(\frac{s}{c_1}), & s\in[0,c_1] \\ f_2(\frac{s-c_1}{c_2-c_1}), & s\in[c_1,c_2] \\ \vdots & \\ f_m(\frac{s-c_{m-1}}{c_m-c_{m-1}}), & s\in[c_{m-1},1] \end{cases}$$

f_n dapat dilihat pada Gambar 3.4.



Gambar 3.4 Gambar f_n

Karena $U \cap V$ terhubung lintasan serta x_0 dan $f(c_i)$ terdapat di $U \cap V$ maka dapat didefinisikan $\alpha_i, i = 0,1,...,m$ sembarang lintasan pada $U \cap V$ dimana $\alpha_i(0) = x_0$ dan $\alpha_i(1) = f(c_i)$, sedangkan α_0 dan α_m didefinisikan sebagai lintasan yang memetakan semua anggota I ke x_0. Lebih lanjut definisikan $\tilde{\alpha}_i(i) = \alpha_i(1-i)$ yang merupakan invers dari α_i , $\tilde{\alpha}_i$ adalah lintasan pada $U \cap V$ dimana $\tilde{\alpha}_i(0) = \alpha_i(1) = f(c_i)$ dan $\tilde{\alpha}_i(1) = \alpha_i(0) = x_0$, $\tilde{\alpha}_0$ dan $\tilde{\alpha}_m$ merupakan lintasan yang memetakan semua anggota I ke x_0 , α_i dan $\tilde{\alpha}_i$ dapat dilihat pada Gambar.3.5.



Gambar.3.5 Gambar α_i dan $\tilde{\alpha}_i$

Definisikan $g_i = (\alpha_{i-1} * f_i) * \tilde{\alpha}_i,\ i = 1,2,...,m$

$$g_1 = (\alpha_0 * f_1) * \tilde{\alpha}_1$$
$$g_2 = (\alpha_1 * f_2) * \tilde{\alpha}_2$$
$$\vdots$$
$$g_m = (\alpha_{m-1} * f_m) * \tilde{\alpha}_m$$

adalah *loop* yang berbasiskan di x_0. Dengan demikian dapat definisikan operasi perkalian antar $g_i, i = 1,2,...,m$. Sebagai berikut,

$$\begin{aligned} g &= g_1 * g_2 * ... * g_m \qquad ...(3.1.1) \\ &= (\alpha_0 * f_1 * \tilde{\alpha}_1) * (\alpha_1 * f_2 * \tilde{\alpha}_2) * ... * (\alpha_{m-1} * f_m * \tilde{\alpha}_m) \\ &= \alpha_0 * f_1 * (\tilde{\alpha}_1 * \alpha_1) * f_2 * (\tilde{\alpha}_2 * \alpha_2) * ... * f_m * \tilde{\alpha}_m \end{aligned}$$

Kelas homotopi dari g yaitu $[g]$ dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} [g] &= [\alpha_0 * f_1 * (\tilde{\alpha}_1 * \alpha_1) * f_2 * (\tilde{\alpha}_2 * \alpha_2) * ... * f_m * \tilde{\alpha}_m] \\ &= [\alpha_0] * [f_1] * [\tilde{\alpha}_1 * \alpha_1] * [f_2] * [\tilde{\alpha}_2 * \alpha_2] * ... * [f_m] * [\tilde{\alpha}_m] \qquad ...(3.1.2) \end{aligned}$$

$\tilde{\alpha}_i * \alpha_i$ adalah *loop* yang berbasis di titik x_0 yang seluruhnya terletak di $U \cap V$, sehinga $\tilde{\alpha}_i * \alpha_i$ seluruhnya terletak di U dan juga seluruhnya terletak di V. Lebih lanjut, karena U dan V terhubung sederhana, maka menurut Definisi 2.13 $[\tilde{\alpha}_i * \alpha_i] = [e_{x_0}]$. Karena α_0 dan α_m memetakan semua anggota I ke x_0, maka α_0 dan $\tilde{\alpha}_m$ merupakan *loop* pada $U \cap V$ yang berbasis di titik x_0 sehingga $[\alpha_0] = [e_{x_0}]$, dan $[\tilde{\alpha}_m] = [e_{x_0}]$. Akibatnya (3.1.2) menjadi

$$[g]=[\alpha_0]*[f_1]*[\tilde{\alpha}_1*\alpha_1]*[f_2]*[\tilde{\alpha}_2*\alpha_2]*...*[f_m]*[\tilde{\alpha}_m]$$

$$=[e_{x_0}]*[f_1]*[e_{x_0}]*[f_2]*[e_{x_0}]*...*[f_m]*[e_{x_0}] \qquad \text{…(3.1.3)}$$

Selanjutnya berdasarkan Lemma 2.6, (3.1.3) menjadi

$$[g]=[f_1]*[f_2]*...*[f_m] \qquad \text{…(3.1.4)}$$

dan dari (3.1.1) diperoleh

$$[g]=[g_1*g_2*...*g_m]=[g_1]*[g_2]*...*[g_m] \qquad \text{…(3.1.5)}$$

Karena $g_i=(\alpha_{i-1}*f_i)*\tilde{\alpha}_i$ adalah *loop* yang berbasiskan di x_0 yang seluruhnya terletak di U atau seluruhnya terletak di V maka $[g_i]=[(\alpha_{i-1}*f_i)*\tilde{\alpha}_i]=[e_{x_0}]$. Sehingga (3.1.5) menjadi

$$\begin{aligned}[g]&=[g_1]*[g_2]*...*[g_m]\\&=[e_{x_0}]*[e_{x_0}]*...*[e_{x_0}]\\&=[e_{x_0}]\end{aligned} \qquad \text{…(3.1.6)}$$

Karena $f=f_1*f_2*...*f_m$ maka $[f]=[f_1]*[f_2]*...*[f_m]$. Dari (3.1.4) didapatkan $[f]=[f_1]*[f_2]*...*[f_m]=[g]$. Kemudian dari (3.1.6) didapatkan $[f]=[g]=[e_{x_0}]$. Maka untuk sembarang *loop* f di X, $[f]$ trivial. Karena X terhubung lintasan dan grup fundamental X trivial, berdasarkan Definisi 2.13, X terhubung sederhana.

Teorema 3.1.2. S^2 terhubung sederhana.

Bukti. Misalkan $p = (0,0,1) \in S^2$ dan $q = (0,0,-1) \in S^2$. Definisikan fungsi $f : (S^2 - p) \to R^2$, dimana

$$f(x) = f((x_1, x_2, x_3)) = (\frac{1}{1-x_3}(x_1, x_2)) \text{ ; x=}(x_1, x_2, x_3) \in S^2 - p \text{ .}$$

Lebih lanjut pada [3] telah dinyatakan bahwa fungsi *f* bersifat kontinu dan bijektif dengan invers yang juga kontinu.

$$f^{-1}(y_1, y_2) = \left(\frac{2y_1}{1+\sqrt{y_1^{\,2} + y_2^{\,2}}}, \frac{2y_2}{1+\sqrt{y_1^{\,2} + y_2^{\,2}}}, \frac{\sqrt{y_1^{\,2} + y_2^{\,2}} - 1}{1+\sqrt{y_1^{\,2} + y_2^{\,2}}} \right)$$

Karena terdapat fungsi kontinu $f : (S^2 - p) \to R^2$ dimana inversnya juga merupakan fungsi kontinu, maka $(S^2 - p)$ homeomorfik dengan R^2 . Lebih lanjut menurut [3] R^2 terhubung sederhana maka $(S^2 - p)$ juga terhubung sederhana. Dengan cara yang serupa dapat ditunjukkan $(S^2 - q)$ homeomorfik dengan R^2, sehingga $(S^2 - q)$ juga terhubung sederhana.

Karena $S^2 = (S^2 - p) \cup (S^2 - q)$, kemudian $(S^2 - p) \cap (S^2 - q)$ tidak kosong dan terhubung lintasan, serta $(S^2 - p)$ dan $(S^2 - q)$ terhubung sederhana maka menurut Teorema 3.1.1 S^2 terhubung sederhana.

Karena S^2 terhubung sederhana maka berdasarkan Definisi 2.13 $\pi_1(S^2, x_0)$ merupakan grup trivial untuk setiap $x_0 \in X$.

3.2. Grup Fundamental Pada *Torus*.

Misalkan S^1 adalah sebuah lingkaran berjari-jari satu yang berada pada R^2, ruang $T = S^1 \times S^1$ dinamakan *torus*. *Torus* sendiri berada pada ruang R^4. Tujuan pembahasan dalam subbab ini adalah mempelajari $\pi_1(S^1 \times S^1, x_0 \times y_0)$, yang merupakan grup fundamental *Torus*, isomorfik dengan $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$. Isomorfisma antara $\pi_1(S^1 \times S^1, x_0 \times y_0)$ dengan $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ tidak akan dicari secara langsung tetapi terlebih dahulu akan ditunjukkan $\pi_1(S^1 \times S^1, x_0 \times y_0)$ isomorfik dengan $\pi_1(S_1, x_0) \times \pi_1(S_1, y_0)$, untuk permasalahan ini akan digunakan teorema yang menyatakan bahwa untuk ruang X dan Y, $\pi_1(X \times Y, x_0 \times y_0)$ isomorfik dengan $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$. Kemudian dengan menggunakan sifat $\pi_1(S_1, x_0)$ yang isomorfik dengan $(\mathbb{Z}, +)$, [1], akan dibuat isomorfisma antara $\pi_1(S_1, x_0) \times \pi_1(S_1, y_0)$ dengan $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$.

Langkah awal untuk menunjukkan dua himpunan saling isomorfik adalah menunjukkan terdapat fungsi antara keduanya, kemudian fungsi tersebut harus dibuktikan merupakan homorfisma yang bersifat satu-satu dan pada. Fungsi yang akan dibangun untuk membuktikan $\pi_1(X \times Y, x_0 \times y_0)$ isomorfik dengan $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ adalah fungsi antar grup fundamental, bentuk fungsi untuk kepentingan ini tidak akan dicari secara langsung, tetapi diinduksi dari suatu fungsi kontinu seperti yang diberikan pada definisi dibawah ini.

Definisi 3.2.1. Misalkan $h:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ adalah fungsi kontinu. Fungsi h_* dari $\pi_1(X,x_0)$ ke $\pi_1(Y,y_0)$ memetakan setiap $[f]$ di $\pi_1(X,x_0)$ ke $[h\circ f]$ di $\pi_1(Y,y_0)$ dan ditulis sebagai $h_*([f])=[h\circ f]$.

Setelah mendapatkan bentuk fungsi antar grup fundamental seperti diatas, berikutnya adalah mencari apakah fungsi tersebut merupakan homomorfisma, pada [1] telah dibuktikan bahwa fungsi h_* seperti pada Definisi 3.2.1 merupakan homomorfisma.

Lemma 3.2.1. Jika $h:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ adalah fungsi kontinu maka h_* seperti pada Definisi 3.2.1 adalah sebuah homomorfisma. h_* disebut homomorfisma yang diinduksi oleh h.

Kemudian yang menjadi permasalahan selanjutnya adalah mencari bentuk fungsi kontinu yang tepat untuk digunakan dalam menginduksi homomorfisma antara $\pi_1(X\times Y,x_0\times y_0)$ dengan $\pi_1(X,x_0)\times\pi_1(Y,y_0)$. Fungsi yang dapat digunakan untuk kepentingan ini adalah fungsi proyeksi, berikut akan diberikan definisi dari fungsi proyeksi.

Definisi 3.2.2. Misalkan $p:X\times Y\to X$ dimana $p(x,y)=x$ dan $q:X\times Y\to Y$ dimana $q(x,y)=y$. Fungsi p dan q disebut fungsi proyeksi.

Teorema 3.2.1. Misalkan $p: X \times Y \to X$ dan $q: X \times Y \to Y$ adalah fungsi proyeksi, maka

$$p_*: \pi_1(X \times Y, x_0 \times y_0) \to \pi_1(X, x_0) \text{ dimana } p_*([f]) = [p \circ f]$$

dan

$$q_*: \pi_1(X \times Y, x_0 \times y_0) \to \pi_1(Y, y_0) \text{ dimana } q_*([f]) = [q \circ f]$$

adalah sebuah homomorfisma.

Bukti. Menurut [3] fungsi proyeksi $p: X \times Y \to X$ merupakan fungsi kontinu, dan menurut Lemma 3.2.1, $p_*: \pi_1(X \times Y, x_0 \times y_0) \to \pi_1(X, x_0)$ dimana $p_*([f]) = [p \circ f]$ adalah sebuah homomorfisma. Begitu juga berlaku untuk $q_*: \pi_1(X \times Y, x_0 \times y_0) \to \pi_1(Y, y_0)$.

Setelah didapatkan suatu bentuk homomorfisma yang diinduksi dari fungsi proyeksi, lebih lanjut akan dibuktikan $\pi_1(X \times Y, x_0 \times y_0)$ isomorfik dengan $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.

Teorema 3.2.2. $\pi_1(X \times Y, x_0 \times y_0)$ isomorfik dengan $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.

Bukti. Misalkan $p: X \times Y \to Y$ dan $q: X \times Y \to Y$ adalah fungsi proyeksi. Definisikan fungsi $p*$ dan $q*$

$$p*: \pi_1(X \times Y, x_0 \times y_0) \to \pi_1(X, x_0) \text{ dengan } p*([f]) = [p \circ f]$$

$$q*: \pi_1(X \times Y, x_0 \times y_0) \to \pi_1(Y, y_0) \text{ dengan } q*([f]) = [q \circ f]$$

Berdasarkan Teorema 3.2.1, $p*$ dan $q*$ merupakan homomorfisma.

Lebih lanjut, definisikan pula pemetaan Φ:

$$\Phi : \pi_1(X \times Y, x_0 \times y_0) \to \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

$$\Phi([g]) = (p*([g]), q*([g])) = ([p \circ g],[q \circ g]),\ [g] \in \pi_1(X \times Y, x_0 \times y_0)$$

Akan ditunjukkan Φ merupakan isomorfisma dari $\pi_1(X \times Y, x_0 \times y_0)$ ke $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$. Berdasarkan Lemma 2.4, pemetaan Φ merupakan homomorfisma dari $\pi_1(X \times Y, x_0 \times y_0)$ ke $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$. Dengan demikian cukup dibuktikan Φ satu-satu dan pada.

Mula-mula akan dibuktikan Φ pada, yaitu akan ditunjukkan untuk setiap $([h],[k]) \in \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ terdapat $[f] \in \pi_1(X \times Y, x_0 \times y_0)$ sehingga $\Phi([f]) = ([h],[k])$. Misalkan $([h],[k])$ sembarang anggota $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$, pilih $[f] \in \pi_1(X \times Y, x_0 \times y_0)$ dimana $f(i) = (h(i), k(i)),\ i \in I$. f adalah *loop* pada (X, Y) yang berbasis di (x_0, y_0) karena $f(0) = (h(0), k(0)) = (h(1), k(1)) = f(1) = (x_0, y_0)$ dan f kontinu. Maka untuk setiap $([h],[k]) \in \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$, terdapat $[f] \in \pi_1(X \times Y, x_0 \times y_0)$ sehingga $\Phi([f]) = ([h],[k])$.

Kemudian akan dibuktikan Φ satu-satu dengan menunjukkan bahwa kernel dari Φ hanya terdiri dari $[e_{(x_0,y_0)}]$ yaitu elemen identitas di $\pi_1(X \times Y, x_0 \times y_0)$. Elemen identitas di $\pi_1(X \times Y, x_0 \times y_0)$ adalah $[e_{(x_0,y_0)}]$ dimana $e_{(x_0,y_0)} : I \to X \times Y$ dengan $e_{(x_0,y_0)}(i) = (e_{x_0}(i), e_{y_0}(i)) = (x_0, y_0)$. Sedangkan elemen identitas di $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ adalah $([e_{x_0}],[e_{y_0}])$ dimana $[e_{x_0}]$ adalah elemen identitas di $\pi_1(X, x_0)$ dengan $e_{x_0}(i) = x_0$, dan

$[e_{y_0}]$ elemen identitas di $\pi_1(Y, y_0)$ dengan $e_{y_0}(i) = y_0$. Lebih lanjut misalkan $[f]$ dimana $f(i) = (h(i), k(i))$ adalah sembarang anggota kernel Φ , maka $\Phi([f]) = (p*([f]), q*([f]) = ([p \circ f], [q \circ f]) =$ $([h],[k])$ adalah identitas di $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ sehingga $([h],[k]) = ([e_{x_0}],[e_{y_0}])$ dengan demikian h homotopik lintasan dengan e_{x_0} dan k homotopik lintasan dengan e_{y_0} . Karena h homotopik lintasan dengan e_{x_0} terdapat $M : I \times I \to X$ dengan

$$M(i,0) = h(i) \text{ dan } M(i,1) = e_{x_0}(i)$$
$$M(0,t) = x_0 \text{ dan } M(1,t) = x_0$$

dimana M adalah homotopi lintasan antara h dan e_{x_0}. Demikian pula karena k homotopik lintasan dengan e_{y_0} ,maka terdapat $N : I \times I \to Y$ dengan

$$N(i,0) = k(i) \text{ dan } N(i,1) = e_{y_0}(i)$$
$$N(0,t) = y_0 \text{ dan } N(1,t) = y_0$$

kemudian akan dibuat sebuah fungsi homotopi lintasan F antara f dengan $e_{(x_0,y_0)}$, yaitu

$$F : I \times I \to X \times Y$$

$$F(i,t) = (M(i,t), N(i,t))$$

$$F(i,0) = (M(i,0), N(i,0)) = (h(i), k(i)) \text{ dan}$$

$$F(i,1) = (M(i,1), N(i,1)) = (e_{x_0}(i), e_{y_0}(i)) = e_{(x_0,y_0)}(i)$$

$$F(0,t) = (M(0,t), N(0,t)) = (x_0, y_0) \text{ dan}$$

$$F(1,t) = (M(1,t), N(1,t)) = (x_0, y_0)$$

karena terdapat F homotopi lintasan antara f dengan $e_{(x_0,y_0)}$, maka $[f]=[e_{(x_0,y_0)}]$. Terbukti bahwa kernel Φ adalah elemen identitas di $\pi_1(X\times Y, x_0\times y_0)$. Terbukti bahwa Φ adalah isomorfisma.

Torus adalah ruang topologi yang merupakan produk dari lingkaran, sehingga menurut Teorema 3.2.2, dapat dikatakan bahwa $\pi_1(S^1\times S^1, x_0\times y_0)$ isomorfik dengan $\pi_1(S_1, x_0)\times\pi_1(S_1, y_0)$.

Akibat 3.2.3. $\pi_1(S_1\times S_1, x_0\times y_0)$ isomorfik dengan $\pi_1(S_1, x_0)\times\pi_1(S_1, y_0)$ **.**

Menurut Akibat 3.2.3, $\pi_1(S^1\times S^1, x_0\times y_0)$ isomorfik dengan $\pi_1(S_1, x_0)\times\pi_1(S_1, y_0)$. Selanjutnya akan dibuat isomorfisma antara $\pi_1(S_1, x_0)\times\pi_1(S_1, y_0)$ dengan $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ dengan menggunakan sifat bahwa $\pi_1(S_1, x_0)$ isomorfik dengan $(\mathbb{Z},+)$. Pernyataan mengenai sifat ini diberikan dalam Teorema 3.2.4 namun pembuktiannya, untuk alasan efisiensi, tidak disertakan tetapi ada pada [1].

Teorema 3.2.4. $\pi_1(S_1, x_0)$ isomorfik dengan $(\mathbb{Z},+)$ untuk setiap $x_0\in S^1$.

Berikutnya akan dibuktikan bahwa $\pi_1(S^1 \times S^1, x_0 \times y_0)$ isomorfik dengan $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$.

Teorema 3.2.5. $\pi_1(S^1 \times S^1, x_0 \times y_0)$ isomorfik dengan grup $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$.

Bukti. Pertama-tama akan dibuktikan terlebih dahulu terdapat isoorfisma antara $\pi_1(S_1, x_0) \times \pi_1(S_1, y_0)$ dengan $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$. Karena $\pi_1(S_1, x_0)$ isomorfik dengan $(\mathbb{Z}, +)$ untuk setiap $x_0 \in S^1$, maka dapat dibuat isomorfisma

$\Phi_1 : \pi_1(S^1, x_0) \to (\mathbb{Z}, +)$ dan
$\Phi_2 : \pi_1(S^1, y_0) \to (\mathbb{Z}, +)$

Definisikan

$$H : \pi_1(S^1, x_0) \times \pi_1(S^1, y_0) \to (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$$
$$H([f],[g]) = (\Phi_1([f]), \Phi_2([g])) \; ; \; [f] \in \pi_1(S^1, x_0), [g] \in \pi_1(S^1, y_0)$$

Ambil $([a_1],[a_2])$ dan $([b_1],[b_2])$ sembarang anggota $\pi_1(S^1, x_0) \times \pi_1(S^1, y_0) \to (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$, akan dibuktikan H homomorfisma dengan menunjukkan $H(([a_1],[a_2]) * ([b_1],[b_2])) = H([a_1],[a_2]) + H([b_1],[b_2])$. Berdasarkan Lemma 2.3 berlaku

$$H(([a_1],[a_2]) * ([b_1],[b_2])) = H(([a_1] * [b_1]), ([a_2] * [b_2])) \qquad \ldots(3.2.1)$$

berdasarkan definisi H , (3.2.1) menjadi

$$\begin{aligned} H(([a_1],[a_2]) * ([b_1],[b_2])) &= H(([a_1] * [b_1]), ([a_2] * [b_2])) \\ &= (\Phi_1([a_1] * [b_1]), \Phi_2([a_2] * [b_2])) \end{aligned}$$

karena Φ_1 dan Φ_2 adalah homomorfisma, maka

$$(\Phi_1([a_1]*[b_1]),\Phi_2([a_2]*[b_2]))=(\Phi_1([a_1])+\Phi_1([b_1])),(\Phi_2([a_2])+\Phi_2([b_2])$$

…(3.2.2)

$\Phi_1([a_1])$, $\Phi_1([a_2])$, $\Phi_2([b_1])$, dan $\Phi_2([b_2])$ adalah anggota dari grup $(\mathbb{Z},+)$, dengan demikian berdasarkan Lemma 2.3, (3.2.2) menjadi

$$(\Phi_1([a_1])+\Phi_1([b_1])),(\Phi_2([a_2])+\Phi_2([b_2])=(\Phi_1([a_1]),\Phi_2([a_2]))+(\Phi_1([b_1]),\Phi_2([b_2]))$$

...(3.2.3)

kemudian berdasarkan definisi H, (3.2.3) menjadi

$$(\Phi_1([a_1]),\Phi_2([a_2]))+(\Phi_1([b_1]),\Phi_2([b_2]))=H([a_1],[a_2])+H([b_1],[b_2])$$

…(3.2.4)

Dari (3.2.1), (3.2.2), (3.2.3), dan (3.2.4) didapatkan

$$H(([a_1],[a_2])*([b_1],[b_2]))=H([a_1],[a_2])+H([b_1],[b_2])$$

sehingga berdasarkan Definisi 2.4, H merupakan homomorfisma.

Kemudian akan ditunjukkan H satu-satu dan pada. Ambil (p,q) sembarang elemen $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, karena Φ_1 dan Φ_2 pada maka terdapat $[a]\in\pi_1(S^1,x_0)$ dan $[b]\in\pi_1(S^1,y_0)$ dimana $\Phi_1[a]=p$ dan $\Phi_2([b])=q$, maka untuk (p,q) sembarang elemen $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ terdapat $([a],[b])\in\pi_1(S^1,x_0)\times\pi_1(S^1,y_0)$ sehingga $H([a],[b])=(p,q)$.

Berikutnya akan ditunjukkan H satu satu. $([e_{x_0}],[e_{y_0}])$ adalah identitas di $\pi_1(S^1,x_0)\times\pi_1(S^1,y_0)$. Akan ditunjukkan kernel H adalah $([e_{x_0}],[e_{y_0}])$. Ambil

$([a],[b])$ sembarang anggota kernel , $H([a],[b]) = (\Phi_1([a]),\Phi_2([a])) = (0,0)$. Karena Φ_1 dan Φ_2 satu-satu maka $[a]$ adalah identitas di $\pi_1(S^1,x_0)$, $[a]=[e_{x_0}]$,dan $[b]$ identitas di $\pi_1(S^1,y_0)$, $[b]=[e_{y_0}]$. Dengan demikian kernel H hanya terdiri dari $([e_{x_0}],[e_{y_0}])$. Sehingga berdasarkan Lemma 2.2, H satu-satu. Telah ditunjukan terdapat isomorfisma antara $\pi_1(S^1,x_0)\times\pi_1(S^1,y_0)$ dengan $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$. Karena $\pi_1(S^1\times S^1,x_0\times y_0)$ isomorfik dengan $\pi_1(S^1,x_0)\times \pi_1(S^1,y_0)$ maka $\pi_1(S^1\times S^1,x_0\times y_0)$ isomorfik dengan $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$.

Menurut Lemma 2.8, grup fundamental pada semua titik di sebuah ruang yang terhubung lintasan saling isomorfik. Misalkan (a,b) dan (c,d) adalah dua titik sembarang pada *torus.* misalkan k adalah lintasan antara a dengan c dan l lintasan antara b dengan d . Definisikan $m: I \to S^1\times S^1$ dimana $m(i)=(k(i),l(i))$. Pada [3] telah dinyatakan bahwa produk dari dua fungsi kontinu juga merupakan fungsi kontinu, karena k dan l adalah fungsi kontinu maka m merupakan fungsi kontinu, $m(0)=(k(0),l(0))=(a,b)$ dan $m(1)=(k(1),l(1))=(c,d)$ maka m adalah lintasan antara (a,b) dan (c,d) . Karena pada *torus* terdapat lintasan untuk dua titik sembarang maka *torus* terhubung lintasan, sehingga grup fundamental di setiap titiknya saling isomorfik dan dapat disimpulkan grup fundamental *torus* isomorfik dengan $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$.

3.3. Grup Fundamental pada P^2

Isi pembahasan pada subbab ini bertujuan untuk menunjukkan grup fundamental dari P^2 memiliki order 2. $P^2 = \{\{x,-x\} \mid x \in S^2\}$ atau bidang proyeksi adalah sebuah himpunan yang setiap anggotanya merupakan pasangan dari x, anggota dari S^2, dengan $-x$. $-x$ dinamakan antipodal dari x. Fungsi yang memetakan $x \in S^2$ ke $-x$ disebut fungsi antipodal, berikut akan diberikan definisinya.

Definisi 3.3.1. fungsi $a : S^2 \to S^2$ dimana $a(x) = -x,\ x \in S^2$ dinamakan fungsi antipodal dan $a(x)$ dinamakan antipodal dari x. Jika $U \subset S^2$ maka $a(U) = \{-u \mid u \in U\}$.

Teorema 3.3.1 di bawah ini akan membahas mengenai salah satu sifat yang dimiliki oleh fungsi antipodal.

Teorema.3.3.1. Misalkan $x \in S^2$, dan $N_\varepsilon(x)$ adalah himpunan anggota S^2 yang berjarak kurang dari ε dengan x. Jika $\varepsilon < 1$, maka $N_\varepsilon(x) \cap a(N_\varepsilon(x)) = \phi$.

Bukti. Akan digunakan kontradiksi untuk membuktikan Teorema 3.3.1. Misalkan $N_\varepsilon(x) \cap a(N_\varepsilon(x))$ tidak kosong, berarti terdapat $y \in N_\varepsilon(x) \cap a(N_\varepsilon(x))$ dimana $y \in N_\varepsilon(x)$ dan $y \in a(N_\varepsilon(x))$ dengan $d(x,y) < 1$ dan $d(-x,y) < 1$. Pada

S^2 berlaku $d(x,-x) \leq d(x,y) + d(y,-x)$ dimana $d(x,-x) = 2$ sehingga $2 \leq d(x,y) + d(y,-x)$. Karena $d(x,y) < 1$, maka

$$2 \leq d(x,y) + d(-x,y) < 1 + d(-x,y)$$

$$2 \leq 1 + d(-x,y)$$

$$1 \leq d(-x,y)$$

Karena $1 \leq d(-x,y)$, maka $y \notin a(N_\varepsilon(x))$. Untuk $y \in N_\varepsilon(x)$ didapatkan $y \notin a(N_\varepsilon(x))$. Hal ini kontradiksi dengan yang dimisalkan di awal, yaitu $y \in N_\varepsilon(x) \cap a(N_\varepsilon(x))$ atau $N_\varepsilon(x) \cap a(N_\varepsilon(x))$ tidak kosong. Jadi terbukti $N_\varepsilon(x) \cap a(N_\varepsilon(x)) = \phi$.

Sifat yang dibahas pada teorema diatas menjelaskan bahwa jika terdapat suatu himpunan pada S^2 yang anggotanya berjarak kurang dari satu dengan x , maka himpunan tersebut tidak akan beririsan dengan antipodalnya.

Sebelum mempelajari grup fundamental P^2 , diberikan suatu bentuk fungsi yang menghubungkan S^2 dengan P^2. Fungsi yang memetakan setiap x anggota S^2 ke $\{x,-x\}$ anggota P^2.

Definisi 3.3.2. $p : S^2 \to P^2$ dimana $p(x) = \{x,-x\}$,$x \in S^2$.

Hasil dari pemetaan x anggota S^2 oleh fungsi p pada definisi diatas sama dengan hasil pemetaan antipodal x, yaitu $-x$, oleh p, $p(x) = p(-x) = \{x, -x\},\ x \in S^2$. Jika U adalah subhimpunan dari S^2, maka $p(U) = p(a(U)) = \{\{x, -x\} \mid x \in U\}$.

Teorema 3.3.2. Misalkan U adalah himpunan bagian dari S^2 dan $p : S^2 \to P^2$ dimana $p(x) = \{x, -x\}$,$x \in S^2$. Prapeta dari $p(U)$ adalah $U \cup a(U)$.

Bukti. Misalkan $p^{-1}(p(U))$ adalah prapeta dari $p(U)$. Mula-mula akan dibuktikan $p^{-1}(p(U)) \subseteq U \cup a(U)$. Misalkan y adalah sembarang anggota $p(U)$, $y = \{x, -x\},\ x \in U$. Prapeta dari y adalah x dan $-x$ dimana $x \in U$ dan $-x \in a(U)$. Karena untuk setiap $y \in p(U)$ prapeta dari y adalah elemen dari $U \cup a(U)$, maka $p^{-1}(p(U)) \subseteq U \cup a(U)$.

Kemudian akan ditunjukkan $U \cup a(U) \subseteq p^{-1}(p(U))$. Misalkan x sembarang anggota $U \cup a(U)$. Jika $x \in U$ maka $p(x) = \{x, -x\} \in p(U)$, dan juga untuk $x \in a(U)$ berlaku $p(x) = \{x, -x\},\ x \in p(U)$. Dengan demikian untuk setiap $x \in U \cup a(U)$ berlaku $p(x) \in p(U)$, $U \cup a(U) \subseteq p^{-1}(p(U))$. Jadi terbukti $p^{-1}(p(U)) = U \cup a(U)$.

Sebuah himpunan dikatakan buka dalam suatu ruang topologi X jika himpunan tesebut merupakan anggota topologi X. Dengan demikian sebuah himpunan pada P^2 dikatakan buka jika himpunan itu merupakan anggota topologi milik P^2, karena itu untuk memdefinisikan himpunan buka pada P^2, perlu diketahui terlebih dahulu topologi dari P^2.

Definisi 3.3.3. Misalkan X adalah sebuah ruang dan A adalah sebuah himpunan. Misalkan pula $f: X \rightarrow A$ adalah fungsi yang bersifat pada. Maka $\tau = \{U \mid f^{-1}(U) \text{ buka di } X\}$ merupakan topologi di A. τ disebut topologi kuosien yang diinduksi oleh f. τ adalah topologi dari A.

$p: S^2 \rightarrow P^2$ dimana $p(x) = \{x, -x\}$,$x \in S^2$ adalah pemetaan yang bersifat pada karena untuk setiap $\{x, -x\} \in P^2$ terdapat $x \in S^2$ sehingga $p(x) = \{x, -x\}$, menurut Definisi 3.3.3 $\tau_{P^2} = \{U \mid p^{-1}(U) \text{ buka di } S^2\}$ merupakan topologi dari P^2. Misalkan U adalah sembarang himpunan buka di P^2, U merupakan anggota dari τ_{P^2}. Menurut definisi τ_{P^2}, prapeta U juga merupakan himpunan bukan di S^2, sehingga untuk sembarang himpunan buka di P^2, prapetanya juga merupakan himpunan buka, akibatnya p adalah fungsi kontinu.

Selanjutnya akan dipelajari bahwa hasil pemetaan dari himpunan buka pada S^2 oleh fungsi $p: S^2 \rightarrow P^2$ juga merupakan himpunan buka.

Teorema 3.3.3. Misalkan $p: S^2 \to P^2$ dimana $p(x) = \{x, -x\}$,$x \in S^2$. Jika M adalah subhimpunan buka di S^2 maka $p(M)$ adalah subhimpunan buka di P^2.

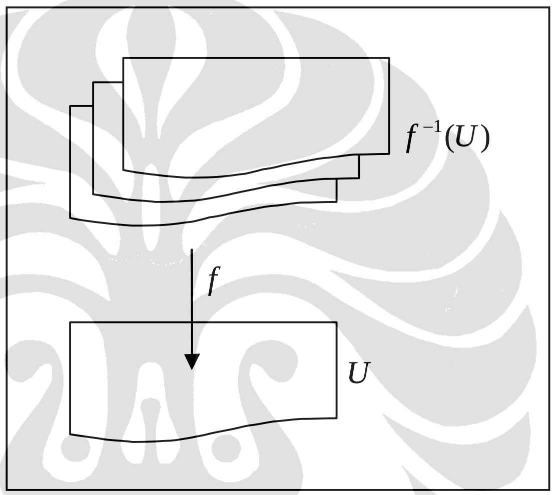
Bukti. Jika M adalah sebuah subhimpunan buka di S^2 , maka menurut Teorema 3.3.2 prapeta dari $p(M)$ adalah $M \cup a(M)$. Menurut [3], fungsi a adalah homeomorfisma sehingga $a(M)$ juga merupakan subhimpunan buka di S^2. Akibatnya $M \cup a(M)$ merupakan subhimpunan buka di S^2, $M \cup a(M)$ anggota topologi S^2. Sehingga menurut Definisi 3.3.3, $p(M)$ adalah anggota topologi di P^2 yang berarti $p(M)$ subhimpunan buka di P^2.

Salah satu cara yang sering digunakan untuk mempelajai sifat grup fundamental sebuah ruang adalah dengan menggunakan fungsi *covering*.

Definisi 3.3.3. Misalkan $f: E \to B$ adalah fungsi kontinu yang pada. Himpunan buka $U \in B$ dikatakan *evenly cover* oleh f jika prapeta U dapat dinyatakan sebagai gabungan dari himpunan buka V_α dimana V_α merupakan himpunan yang saling lepas di E sedemikian hingga untuk setiap α pembatasan fungsi $f | V_\alpha$ adalah homeomorfisma dari V_α ke U. Koleksi $\{V_\alpha\}$ disebut sebagai partisi $f^{-1}(U)$ dalam irisan.

Definisi 3.3.4. Misalkan $f : E \to B$ adalah fungsi kontinu yang pada. Jika untuk setiap $b \in B$ terdapat lingkungan U dari b yang *evenly cover* oleh f, maka f adalah fungsi covering, dan E adalah ruang *covering* dari B.

Jika U adalah himpunan buka yang *evenly cover* oleh f, $f^{-1}(U)$ dapat digambarkan sebagai tumpukan partisi seperti pada Gambar 3.6.



Gambar 3.6 Gambar fungsi *covering*

Jika pemetaan $p : S^2 \to P^2$ dapat dibuktikan merupakan suatu fungsi *covering*, maka hal ini akan sangat membantu untuk dalam mempelajari sifat grup fundamental P^2.

Teorema.3.3.4. $p : S^2 \to P^2$ dimana $p(x) = \{\{x, -x\},\ x \in S^2\}$ adalah fungsi *covering*.

Bukti. Mula-mula akan ditunjukkan p kontinu dan pada. Misalkan U adalah sembarang subhimpunan buka di P^2, $U \in \tau_{P^2}$. Sesuai definisi dari topologi kuosien, prapeta U merupakan subhimpunan buka di S^2. Terbukti p kontinu. Kemudian misalkan $y = \{x, -x\}$ sembarang anggota P^2, terdapat $x \in S^2$ dimana $p(x) = \{x, -x\} = y$. Terbukti p pada.

Selanjutnya akan ditunjukkan untuk setiap $y \in P^2$ terdapat lingkungan yang memuat y dan *evenly covered* oleh p. Pertama akan ditunjukkan bahwa untuk setiap y anggota P^2 terdapat U lingkungan di P^2 yang memuat y dimana prapeta U dapat ditulis sebagai gabungan himpunan-himpunan yang saling lepas di S^2. Misalkan y sembarang anggota P^2. Pilih $x \in S^2$ anggota prapeta y, lalu buat lingkungan-ε dari x, dimana $\varepsilon < 1$, misal bernama N_ε. $N_\varepsilon = \{s \,|\, d(s,x) < \varepsilon; s, x \in S^2\}$. N_ε adalah sebuah himpunan buka di S^2. Menurut Teorema 3.3.3 $p(N_\varepsilon)$ adalah subhimpunan buka di P^2 dan $p(N_\varepsilon)$ memuat y

Sehingga $p(N_\varepsilon)$ adalah lingkungan dari y di P^2. Misalkan $p(N_\varepsilon) = U$, maka menurut Teorema 3.3.2 prapeta dari U adalah $N_\varepsilon \cup a(N_\varepsilon)$. Karena $\varepsilon < 1$, maka berdasarkan Teorema 3.3.1 N_ε dan $a(N_\varepsilon)$ saling lepas.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa p adalah homeomorfisma dari N_ε dan $a(N_\varepsilon)$ ke U. Pemetaan p dari N_ε ke U adalah pemetaan yang dibatasi, $p \,|\, N_\varepsilon : N_\varepsilon \to U$. Misalkan $h = p \,|\, N_\varepsilon : N_\varepsilon \to U$, $h(x) = \{x, -x\}, x \in N_\varepsilon$.

Akan ditunjukkan h satu-satu dan pada. Misalkan $y=\{x,-x\}\in U$. maka terdapat $x\in N_\varepsilon$ dimana $h(x)=\{x,-x\}=y$. Terbukti h pada. Sekarang akan ditunjukkan h satu satu. Misalkan $h(m)=h(n)=\{x,-x\}\in U$, maka $m=n=x$ karena $-x\notin N_\varepsilon$. Jadi h satu satu.

Kemudian akan ditunjukan h dan h^{-1} kontinu. Karena $p:S^2\to P^2$ kontinu, maka menurut Lemma 2.5(d) $p\,|\,N_e:N_\varepsilon\to P^2$ kontinu. Lebih lanjut menurut Lemma 2.5(e) $p\,|\,N_e:N_\varepsilon\to U$ juga kontinu. Dengan demikian terbukti h kontinu.

Sekarang akan ditunjukkan $h^{-1}:U\to N_\varepsilon$ kontinu. Misalkan M sembarang subhimpunan buka di N_ε. h^{-1} kontinu jika $(h^{-1})^{-1}(M)$ juga buka di U . Karena h merupakan pemetaan satu-satu dan pada, maka $(h^{-1})^{-1}(M)=h(M)$. Akan ditunjukkan $(h^{-1})^{-1}(M)=h(M)$ buka di U dengan menunjukkan $h(M)$ adalah anggota dari topologi di U , $h(M)\in\tau_U$. Menurut Definisi 2.2 $\tau_U=\{U\cap X\,|\,X\in\tau_{p^2}\}$ adalah topologi di U . Karena M merupakan subhimpunan buka di N_ε menurut Lemma 2.1 M merupakan subhimpunan buka di S^2. Berdasarkan Teorema 3.3.3 $p(M)$ merupakan subhimpunan buka di P^2 sehingga $p(M)\in\tau_{P^2}$. Karena $M\subset N_\varepsilon$ maka $p(M)\subset p(N_\varepsilon)=U$. Karena $p(M)=U\cap p(M)$, dimana $p(M)$ adalah elemen dari τ_{P^2}, maka $p(M)\in\tau_U$. $p(M)=\{\{x,-x\}\,|\,x\in M\}=h(M)$ sehingga $h(M)\in\tau_U$ yang berarti $h(M)$ merupakan subhimpunan buka di U. Jadi terbukti untuk

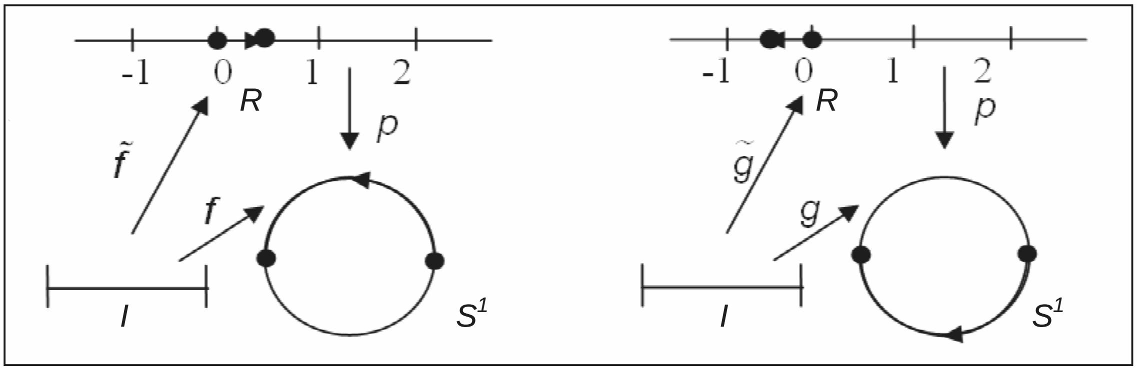
M subhimpunan buka di N_ε, $(h^{-1})^{-1}(M)$ merupakan subhimpunan buka di U, sehingga $h = p \mid N_e : N_\varepsilon \to U$ adalah pemetaan kontinu. Terbukti $p \mid N_e : N_\varepsilon \to U$ adalah homeomorfisma. Dengan cara serupa dapat ditunjukkan $p \mid a(N_e) : a(N_\varepsilon) \to U$ adalah homeomorfisma.

Definisi 3.3.5. Misalkan $p : E \to B$. Jika f adalah pemetaan kontinu dari ruang X ke B, maka lifting dari f adalah pemetaan $\tilde{f} : X \to E$ sedemikian sehingga $p \circ \tilde{f} = f$.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Gambar 3.7 Gambar *lifting* dari fungsi *f*

Contoh 3.1. Misalkan $p : R \to S^1$ dengan $p(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$. Maka $\tilde{f}(s) = s/2$ adalah *lifting* dari $f : [0,1] \to S^1$ dengan $f(s) = (\cos \pi s, \sin \pi s)$ karena $p \circ \tilde{f} = f$. Jika $g : [0,1] \to S^1$ dengan $g(s) = (\cos \pi s, -\sin \pi s)$ maka $\tilde{g}(s) = -s/2$ adalah lifting dari $g(s)$ seperti terlihat pada Gambar 3.8.



Gambar 3.8 Contoh *lifting*

Penggunaan *lifting* dan fungsi *covering* adalah alat yang penting untuk mempelajari grup fundamental.

Definisi 3.3.6. Misalkan $p : E \to B$ fungsi *covering* dimana $p(e_0) = b_0$. Misalkan $\tilde{f}$ adalah *lifting* dari f dengan titik awal e_0. Fungsi

$$\phi : \pi_1(B, b_0) \to p^{-1}(b_0)$$
$$\phi([f]) = \tilde{f}(1)$$

terdefinisi dengan baik dan disebut sebagai korespondensi *lifting.*

Pada [1] telah diberikan pembahasan dan pembuktian bahwa fungsi ϕ seperti pada Definisi 3.3.6 akan bersifat pada jika E terhubung lintasan dan merupakan korespondensi satu-satu jika E terhubung sederhana, seperti yang dinyatakan dalam Teorema 3.3.5 di bawah ini.

Teorema.3.3.5. Misalkan $p: E \to B$ adalah fungsi *covering* dengan $p(e_0) = b_0$. Jika E terhubung lintasan, maka korespondensi *lifting* $\phi: \pi_1(B, b_0) \to p^{-1}(b_0)$ bersifat pada. Jika E terhubung sederhana maka ϕ adalah korespondensi satu satu.

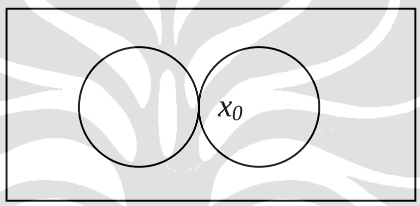
Teorema.3.3.6. $\pi_1(P^2, y)$ adalah grup berorder dua.

Bukti. Misalkan $p: S^2 \to P^2$ adalah fungsi *covering*. Misalkan pula $b_0 \in P^2$, maka terdapat $e_0 \in S^2$ sehingga $p(e_0) = b_0$. Karena S^2 terhubung sederhana, maka $\phi: \pi_1(B, b_0) \to p^{-1}(b_0)$ satu-satu dan pada. Sehingga jumlah elemen $\pi_1(B, b_0)$ sama dengan jumlah elemen $p^{-1}(b_0)$, yaitu dua, karena $p^{-1}(b_0)$ = e_0 dan – e_0.

Misalkan $a = \{x, -x\}, x \in S^2$ dan $b = \{y, -y\}, y \in S^2$ adalah sembarang anggota P^2, akan ditunjukkan terdapat lintasan antara a dan b. x dan y adalah anggota S^2 yang terhubng lintasan. Misalkan $f: I \to S^2$ dimana $f(0) = x$ dan $f(1) = y$ adalah lintasan antara x dan y , definisikan fungsi $h = p \circ f: I \to P^2$ dengan fungsi p seperti pada Definisi 3.3.2, karena p dan f kontinu maka h adalah fungsi kontinu dengan $h(0) = p(f(0)) = p(x) = \{x, -x\} = a$ dan $h(1) = p(f(1)) = p(y) = \{y, -y\} = b$ sehingga h adalah lintasan pada P^2 antara a dan b . Karena P^2 terhubung lintasan maka sesuai Lemma 2.8 grup fundamental P^2 isomorfik pada setiap titik sehingga dapat dikatakan grup fundamental P^2 berorder dua.

3.4. Grup Fundamental Pada *Figure Eight*

Figure eight adalah gabungan dari dua lingkaran di R^2 dengan titik potong di sebuah titik x_0 seperti pada Gambar 3.9.



Gambar 3.9 Gambar *figure eight*

Dalam subbab ini akan ditunjukkan grup fundamental dari *figure eight* tidak bersifat abelian. Untuk menunjukkan hal tersebut, yang harus dibuktikan adalah $[a]*[b] \neq [b]*[a]$ untuk $[a]$ dan $[b]$ anggota grup fundamental *figure eight*. Berdasarkan operasi antar kelas homotopi, $[a]*[b]=[a*b]$, dan $[b]*[a]=[b*a]$. Berdasarkan definisi dari kelas homotopi, $[a]*[b] \neq [b]*[a]$ jika $(a*b)$ dan $(b*a)$ tidak homotopik lintasan. Akan sulit untuk menunjukkan $(a*b)$ dan $(b*a)$ tidak homotopik lintasan dengan membuktikan tidak terdapat homotopi lintasan antara keduanya, oleh karena itu akan digunakan cara lain untuk menunjukkan keduanya tidak homotopik lintasan dengan melibatkan *lifting* milik kedua kelas tersebut. Teorema yang dapat digunakan untuk kepentingan ini telah dibahas dan dibuktikan dalam [1], teorema tersebut akan diberikan dibawah ini.

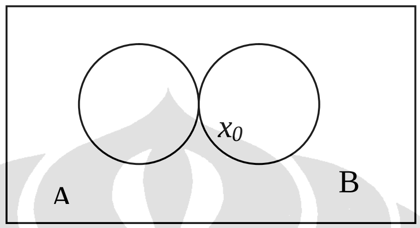
Teorema 3.4.1. Misalkan $p: C \to D$ dimana $p(c_0) = d_0$ adalah fungsi *covering*. Misalkan k dan l adalah dua lintasan pada D dari d_0 ke d_1. Misalkan pula $\tilde{k}$ dan $\tilde{l}$ adalah lintasan pada C yang titik awalnya adalah c_0, yang secara berurutan adalah *lifting* dari k dan l. Jika k homotopik lintasan dengan l, maka $\tilde{k}$ dan $\tilde{l}$ akan mempunyai titik akhir yang sama dan keduanya homotopik lintasan di C.

Kontraposisi dari teorema diatas adalah jika $\tilde{k}$ dan $\tilde{l}$ tidak mempunyai titik akhir yang sama atau tidak homotopik lintasan, maka k dan l tidak homotopik lintasan.

Misalkan D adalah *figure eight*, permasalahan pada awal pembahasan adalah untuk membuktikan terdapat $[a]$ dan $[b]$ pada D sehingga $(a * b)$ dan $(b * a)$ tidak homotopik lintasan. Berdasarkan kontraposisi diatas, langkah yang akan digunakan adalah menunjukkan terdapat himpunan C dimana $p: C \to D$ adalah fungsi *covering* dan selanjutnya menunjukkan bahwa $(a * b)$ dan $(b * a)$ memiliki *lifting* yang bertitik awal sama tetapi tidak mempunyai titik akhir yang sama. Teorema dibawah akan memberi pembahasan untuk tujuan tersebut.

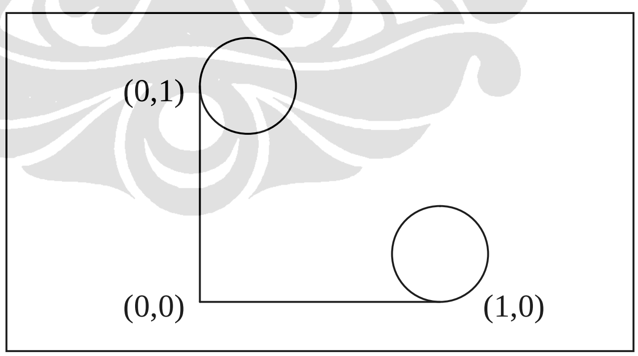
Teorema 3.4.2. Grup fundamental dari *figure eight* tidak abelian.

Bukti. Misalkan D adalah f*igure eight* yang terdiri dari lingkaran A dan B dengan titik potong di x_0 seperti pada Gambar 3.10.



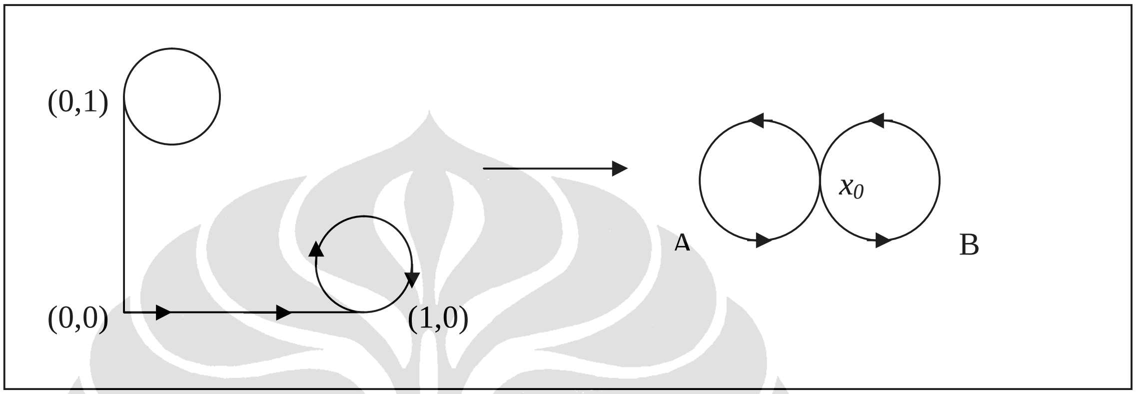
Gambar 3.10 Gambar *figure eight*

Misalkan C adalah subruang dari R^2 yang terdiri dari interval $((0,0),(0,1))$ di sumbu Y, interval $((0,0),(1,0))$ di sumbu X, dan dua lingkaran kecil yang secara berurutan bersinggungan dengan sumbu Y di $(0,1)$ dan bersinggungan dengan sumbu X di $(1,0)$ seperti pada Gambar 3.11.



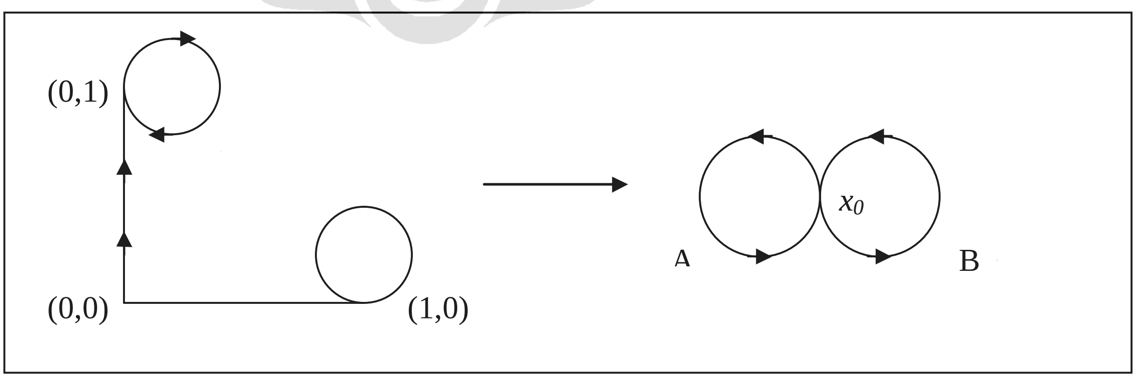
Gambar 3.11 Gambar ruang C

Definisikan pemetaan $p:C \to D$ yang memetakan interval $[(0,0),(0,1)]$ pada sumbu X ke lingkaran A, dan memetakan lingkaran yang menyinggung sumbu X ke lingkaran B seperti pada Gambar 3.12.



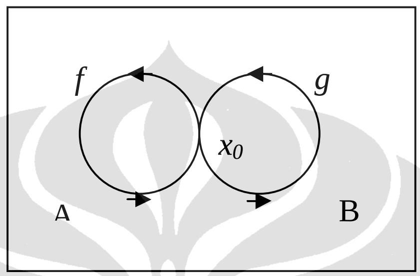
Gambar 3.12 Pemetaan ruang *C* oleh *p*

p juga memetakan interval $[(0,0),(0,1)]$ pada sumbu Y ke lingkaran B, dan memetakan lingkaran yang menyinggung sumbu Y ke lingkaran A seperti pada Gambar 3.13.



Gambar 3.13 Pemetaan ruang *C* oleh *p*

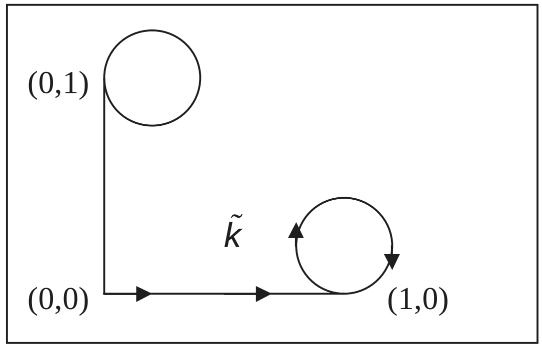
Menurut [3], p adalah fungsi *covering* dari C ke D. Misalkan f adalah *loop* di x_0 yang melewati A, dan g adalah *loop* di x_0 yang melewati B, seperti pada Gambar 3.14.



Gambar 3.14 Gambar *loop f* dan *g*

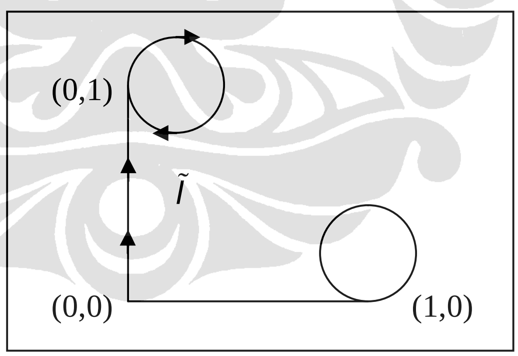
Akan ditunjukkan $[f]*[g] \neq [g]*[f]$ dengan menunjukkan $[f*g] \neq [g*f]$. $f*g$ adalah *loop* berbasis di x_0 yang lintasannya dimulai dari x_0, melewati lingkaran B dan lingkaran A dan berakhir di x_0. $g*f$ juga merupakan *loop* yang lintasannya melewati lingkaran A kemudian lingkaran B.

Misalkan $\tilde{k}: I \rightarrow C$ adalah lintasan berawal dari titik (0,0) kemudian melewati titik (1,0) lalu melewati lingkaran yang menyinggung sumbu X dan berhenti di titik (1,0) seperti pada Gambar 3.15. Karena $p*\tilde{k} = (f*g)$ maka menurut Definisi 3.3.4 $\tilde{k}$ adalah *lifting* dari $f*g$.



Gambar 3.15 Gambar $\tilde{k}$

Kemudian misalkan $\tilde{l}: I \to C$ adalah lintasan dari dari titik (0,0) kemudian melewati titik (0,1) lalu melewati lingkaran yang menyinggung sumbu Y dan berhenti di titik (0,1) seperti pada Gambar 3.16. Karena $p * \tilde{l} = (g * f)$, maka $\tilde{l}$ adalah *lifting* dari $g * f$.



Gambar 3.16 Gambar $\tilde{l}$

$\tilde{k}$ dan $\tilde{l}$ secara berurutan adalah *lifting* dari $(f * g)$ dan $(g * f)$ dengan titik awal yang sama yaitu titik $(0,0)$. Karena $\tilde{k}$ dan $\tilde{l}$ tidak punya titik ujung yang sama maka berdasarkan kontraposisi dari Teorema 3.4.1 $(f * g)$ tidak homotopik dengan $(g * f)$, sehingga $[f * g] \neq [g * f]$ sehingga $[f] * [g] \neq [g] * [f]$. $[f]$ dan $[g]$ adalah kelas homotopi yang berbasis di titik x_0, grup fundamental *figure eight* yang berbasis di x_0 tidak abelian, kerena *figure eight* adalah ruang topologi yang terhubung lintasan, dengan demikian grup fundamental yang berbasis di setiap titik pada *figure eight* tidak abelian, sehingga dapat disimpulkan grup fundamental *figure eight* tidak abelian.

Pada proses pembuktian diatas dapat disimpulkan grup fundamental *figure eight* yang berbasis di x_0 setidaknya memiliki dua anggota yaitu $[f * g]$ dan $[g * f]$, akibatnya grup fundamental yang berbasis di titik-titik yang lain juga setidaknya memiliki dua anggota, sehingga dapat dikatakan *figure eight* tidak terhubung sederhana karena grup fundamentalnya tidak trivial.