BAB II

TEORI DASAR

Pada skripsi ini, akan dipelajari perbedaan sifat grup fundamental yang dimiliki beberapa ruang topologi, yaitu S^2, *torus* , P^2 dan *figure eight*. Ruang topologi adalah suatu himpunan yang mempunyai topologi, yaitu koleksi dari subhimpunan- subhimpunan yang memenuhi beberapa ketentuan, berikut akan diberikan definisi dari topologi.

Definisi 2.1 Topologi di himpunan X adalah koleksi $\Im$ yang terdiri dari himpunan-himpunan bagian X dengan sifat-sifat :

(1). ϕ dan X ada di dalam $\Im$.

(2). Jika $A_i \in \Im$ dengan $i = 1, 2, ..., n$ maka $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \Im$.

(3). Jika $A_\alpha \in \Im$ dengan α anggota himpunan indeks, maka $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \in \Im$.

Himpunan X yang dilengkapi dengan topologi $\Im$ disebut sebagai ruang topologi, dinotasikan dengan $(X, \Im)$ dan sering disingkat dengan X yang tetap mengacu pada suatu topologi di X. A disebut himpunan buka jika $A \in \Im$ dan A disebut himpunan tutup jika A^c adalah himpunan buka.

Jika U adalah himpunan buka yang memuat $x \in X$, maka U disebut sebagai lingkungan dari x .

Misalkan Y adalah sembarang subhimpunan dari X , yang menjadi persoalan lebih lanjut adalah mendefinisikan himpunan buka pada Y karena meskipun Y adalah subhimpunan dari X , topologi pada Y tidak sama dengan topologi pada X . Untuk kepentingan ini akan diberikan definisi topologi pada subhimpunan X .

Definisi 2.2 Misalkan X adalah ruang topologi dengan topologi τ . Jika Y adalah subhimpunan dari X , koleksi $\tau_Y = \{Y \cap U \mid U \in \tau_X\}$ adalah topologi dari Y . τ_Y disebut topologi subruang dari X . Dengan topologi ini Y disebut subruang dari X .

Dengan demikian jika Y adalah sembarang subhimpunan dari X , sebuah subhimpunan pada Y dikatakan buka di Y jika himpunan tersebut merupakan anggota dari $\tau_Y = \{Y \cap U \mid U \in \tau_X\}$. Kemudian misalkan U adalah subhimpunan buka di Y , U belum tentu buka di X karena U belum tentu merupakan anggota dari topologi X . Tetapi untuk sebaliknya, pada [3] telah dibuktikan jika U merupakan subhimpunan buka di Y , maka U merupakan subhimpunan buka di X .

Lemma 2.1 Misalkan X adalah sebuah ruang topologi dan Y adalah subhimpunan dari X. Misalkan U adalah subhimpunan dari Y. Jika U adalah subhimpunan buka di Y, maka U adalah subhimpunan buka di X.

Grup fundamental adalah salah satu topik dasar pada topologi aljabar, salah satu sifat aljabar yang digunakan untuk mempelajari grup fundamental adalah sifat grup,

Definisi 2.3 Himpunan G bersama operator $*$, $(G,*)$, disebut grup jika tertutup terhadap operator $*$, operator $*$ bersifat asosiatif, G mempunyai anggota identitas dan setiap anggota dari G mempunyai invers. G dikatakan bersifat abelian jika untuk sembarang $a,b \in G$, berlaku $a * b = b * a$.

Homomorfisma merupakan sebuah fungsi yang sering menjadi dasar relasi antara dua buah grup, hal tersebut juga berlaku dalam mempelajar grup fundamental. Definisi homomorfisma akan diberikan dibawah ini.

Definisi 2.4 Misalkan G dan $G^{'}$ adalah grup. Fungsi $\varphi : G \to G^{'}$ disebut homomorfisma antara G dan $G^{'}$ jika $\varphi(a * b) = \varphi(a) \bullet \varphi(b)$ untuk setiap $a,b \in G$ dimana $*$ adalah operasi di G, dan $\bullet$ adalah operasi di $G^{'}$. JIka terdapat homomorfisma antara G dan $G^{'}$ maka G disebut homomorfik dengan $G^{'}$.

Jika suatu fungsi telah diketahui merupakan homomorfisma, biasanya fungsi tersebut akan dipelajari apakah juga bersifat satu-satu. Terdapat cara untuk membantu mengetahui apakah homomorfisma pada grup G ke $G^{'}$ bersifat satu-satu atau tidak, yaitu dengan memeriksa anggota kernel dari G, yang artinya anggota-anggota G yang dipetakan ke elemen identitas di $G^{'}$.

Lemma 2.2 Misalkan G dan $G^{'}$ adalah grup. Homomorfisma $\varphi : G \to G^{'}$ satu satu jika dan hanya jika kernel dari G hanya terdiri dari elemen identitas di G.

Homomorfisma yang bersifat satu-satu dan pada disebut isomorfisma, isomofisma adalah fungsi pada aljabar yang mempertahankan struktur aljabar antara dua buah grup.

Definisi 2.5 $\varphi : G \to G^{'}$ adalah isomorfisma antara G dan $G^{'}$ jika φ adalah homomorfisma serta bersifat satu-satu dan pada. G disebut isomorfik dengan $G^{'}$.

Jika grup G isomorfik dengan $G^{'}$ maka dapat dikatakan grup $G^{'}$ adalah grup G yang anggota-anggotanya diberi penamaan ulang, keduanya dapat dikatakan mempunyai struktur grup yang sama.

Produk kartesius dari dua buah grup yang memiliki operasi yang sama juga akan membentuk grup, Lemma 2.3 di bawah akan menjelaskan mengenai hal tersebut.

Lemma 2.3 Misalkan A dan B adalah grup dengan operasi yang sama, yaitu $\bullet$ maka $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$ akan membentuk grup dengan operasi $\bullet$ dimana

$$(a,b) \bullet (c,d) = ((a \bullet c),(b \bullet d)), \text{ dimana } a,c \in A \text{ dan } b,d \in B$$

Bukti. Akan dibuktikan $A \times B$ membentuk grup dengan operasi $\bullet$. Misalkan (a,b) dan (c,d) adalah sembarang elemen $A \times B$, maka

$$(a,b) \bullet (c,d) = ((a \bullet c),(b \bullet d)), \text{ dengan } a,c \in A \text{ dan } b,d \in B.$$

Karena $(a \bullet c) \in A$, dan $(b \bullet d) \in B$, maka $((a \bullet c),(b \bullet d)) \in A \times B$. Jadi $A \times B$ tertutup terhadap operasi $\bullet$. Sifat asosiatif yang dimiliki A dan B juga diturunkan ke ruang $A \times B$, akibatnya $A \times B$ dengan operasi $\bullet$ juga memiliki sifat asosiatif.

e_a dan e_b adalah elemen identitas dari masing-masing grup A dan B. ambil (a,b) sembarang elemen $A \times B$, maka

$$(e_a,e_b) \bullet (a,b) = ((e_a \bullet a),(e_b,b)) = (a,b)$$

$$(a,b) \bullet (e_a,e_b) = ((a \bullet e_a),(b \bullet e_b)) = (a,b)$$

Jadi elemen identitas di $A \times B$ adalah (e_a,e_b).

Misalkan (a,b) sembarang anggota $A \times B$, karena A dan B grup maka terdapat $a^{-1} \in A$ dan $b^{-1} \in B$ sehingga $(a^{-1},b^{-1}) \in A \times B$, akan ditunjukkan $(a,b)^{-1} = (a^{-1},b^{-1})$

$$(a^{-1},b^{-1}) \bullet (a,b) = ((a^{-1} \bullet a),(b^{-1},b)) = (e_a,e_b)$$

$$(a,b) \bullet (a^{-1},b^{-1}) = ((a \bullet a^{-1}),(b,b^{-1})) = (e_a,e_b)$$

Jadi untuk setiap $(a,b) \in A \times B$, terdapat $(a^{-1},b^{-1}) \in A \times B$ dimana (a^{-1},b^{-1}) adalah invers dari (a,b) atau $(a,b)^{-1} = (a^{-1},b^{-1})$. Karena $A \times B$ memenuhi keempat aksioma grup, $A \times B$ membentuk grup dengan operasi $\bullet$.

Misalkan C adalah sebuah grup yang homomorfik dengan masing-masing grup A dan B**,** dimana kedua grup ini mempunyai operasi yang sama. Telah diketahui dari Lemma 2.3 bahwa $A \times B$ juga merupakan sebuah grup, dapat dibangun homomorfisma dari C ke $A \times B$.

Lemma 2.4 Misalkan $(C,*),(A,\bullet)$, dan $(B,\bullet)$ adalah grup, dan misalkan terdapat homomorfisma $h: C \to A$ dan homomorfisma $k: C \to B$, maka

$$\Phi : C \to A \times B$$

$$\Phi(c) = (h(c),k(c))$$

merupakan homomorfisma dari C ke A x B.

Bukti. Karena A dan B adalah grup dengan operasi yang sama, yaitu $\bullet$,maka berdasarkan Lemma 2.3 $A \times B$ juga akan membentuk grup dengan operasi $\bullet$.

Ambil sembarang c dan c’ anggota C,maka

$$\Phi(c * c') = (h(c * c'), k(c * c'))$$

$$= ((h(c) \bullet h(c')), (k(c) \bullet k(c')))$$

sesuai Lemma 2.3.

$$\Phi(c * c') = ((h(c) \bullet h(c')), (k(c) \bullet k(c')))$$

$$= ((h(c), k(c)) \bullet (h(c'), k(c')))$$

$$= \Phi(c) \bullet \Phi(c')$$

jadi $\Phi : C \to A \times B$ adalah homomorfisma.

Salah satu masalah utama pada topologi adalah mencari apakah terdapat homeomorfisma antara dua ruang topologi, Homeomorfisma sendiri merupakan suatu fungsi kontinu yang inversnya juga kontinu. Sebelum diberikan pembahasan mengenai homeomorfisma, terlebih dahulu akan diberikan definisi dari fungsi kontinu.

Definisi 2.6 Misalkan X dan Y adalah ruang topologi. Fungsi $f : X \to Y$ kontinu jika untuk setiap himpunan buka V di Y , himpunan $f^{-1}(V)$ di X juga merupakan himpunan buka.

Definisi fungsi kontinu di atas tidak bertentangan dengan definisi "$\varepsilon - \delta$" yang sering digunakan, kedua definisi tersebut ekuivalen.

Sebagian besar lemma dan teorema dalam skripsi ini beserta pembuktiannya merujuk pada beberapa referensi, terdapat beberapa teorema dan lemma yang pembuktiannya tidak disertakan dalam skripsi ini untuk alasan efisiensi penulisan dan hanya diberikan referensinya, seperti untuk Lemma 2.5 dibawah, lemma tersebut memberikan pembahasan mengenai beberapa cara membangun fungsi kontinu antara ruang topologi, karena proses yang panjang dan alasan efisiensi maka pembuktian lemma yang merujuk pada [3] ini tidak dicantumkan.

Lemma 2.5 Misalkan X, Y, dan Z adalah ruang topologi.

a) Jika $f : X \to Y$ memetakan semua anggota X ke sebuah titik y_0 pada Y, maka f kontinu.

b) Jika A adalah subhimpunan dari X, maka fungsi inklusi $j : A \to X$ kontinu.

c) Jika $f : X \to Y$ dan $g : Y \to Z$ kontinu, maka $g \circ f : X \to Z$ kontinu.

d) Jika $f : X \to Y$ kontinu, dan jika A subhimpunan dari X, maka fungsi yang dibatasi daerah asalnya, $f \,|\, A : X \to Y$, adalah fungsi kontinu.

e) Misalkan $f : X \to Y$ kontinu. Jika Z adalah subhimpunan dari Y yang memuat seluruh daerah hasil dari f, maka fungsi $g : X \to Z$ yang diperoleh dengan membatasi daerah hasil dari f adalah fungsi kontinu.

Jika Z adalah himpunan dimana Y merupakan subhimpunan di Z, maka fungsi $h: X \to Z$ yang diperoleh dengan memperluas daerah hasil dari f juga merupakan fungsi kontinu.

f) Fungsi $f: X \to Y$ kontinu jika X dapat dinyatakan sebagai gabungan dari himpunan himpunan U_α sedemikian sehingga $f | U_\alpha$ kontinu untuk setiap α.

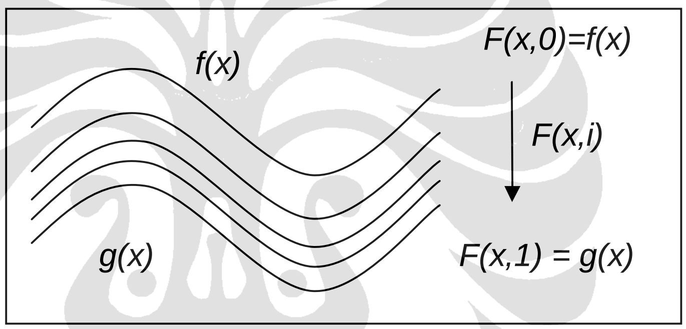
Setelah diberikan definisi fungsi kontinu dan beberapa cara membangun fungsi tersebut pada ruang topologi, definisi berikutnya akan membahas mengenai homeomorfisma.

Definisi 2.7 Misalkan X dan Y adalah ruang topologi dan fungsi $f: X \to Y$ satu-satu dan pada. Jika f dan inversnya. $f^{-1}: Y \to X$ kontinu, maka f disebut homeomorfisma.

Sebelum memasuki pembahasan mengenai grup fundamental, perlu diketahui terlebih dahulu definisi mengenai fungsi homotopi mengenai homotopi. Fungsi ini dapat diartikan sebagai deformasi dari satu fungsi ke fungsi lainnya secara kontinu.

Definisi 2.8 Misalkan $I=[0,1]$. Jika f dan g fungsi kontinu dari X ke Y, f disebut homotopik dengan g jika terdapat sebuah fungsi kontinu $F: X\times I \to Y$ sehingga $F(x,0)=f(x)$ dan $F(x,1)=g(x)$ untuk setiap $x\in X$ .Fungsi F disebut sebagai homotopi antara f dan g. Jika f homotopik dengan g, maka ditulis $f\simeq g$.

Ilustrasi dari homotopi dapat dilihat pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1 Gambar homotopi

Homotopi pada Definisi 2.8 adalah homotopi antara dua fungsi sembarang f dan g. Terdapat homotopi yang sifatnya lebih khusus, yaitu homotopi antara dua fungsi yang mempunyai titik-titik ujung yang sama, fungsi yang demikian disebut lintasan.

Definisi 2.9 Misalkan $I=[0,1]$. Misalkan x dan y adalah anggota himpunan X. Lintasan di X dari x ke y adalah fungsi kontinu $f: I\to X$ dimana $f(0)=x$ dan $f(1)=y$. Titik $f(0)$ dan $f(1)$ dinamakan titik-titik ujung dari f

dimana $f(0)$ dsebut titik awal dari f dan $f(1)$ disebut titik akhir dari f. Lintasan $\tilde{f}: I \rightarrow X$ dimana $\tilde{f}(x) = f(1-x)$ dinamakan lintasan kebalikan atau invers dari f. Ruang X dikatakan terhubung lintasan jika terdapat lintasan antara sembarang dua titik di X.

Lintasan di X yang memetakan semua elemen I ke sebuah titik $a \in X$ dinotasikan dengan e_a, lintasan ini dinamakan lintasan konstan. Sedangkan jika sebuah lintasan f memiliki titik awal dan titik akhir yang sama, misalkan di a, maka f disebut *loop* yang berbasis di a. Karena $e_a(0) = e_a(1) = a$, maka e_a juga merupakan *loop* yang berbasis di a.

Selanjutnya, misalkan terdapat dua lintasan dengan titik awal dan titik akhir yang sama, jika kedua lintasan tersebut saling homotopik maka kedua lintasan itu disebut saling homotopik lintasan. Definisi untuk homotopik lintasan akan diberikan pada Definisi 2.10.

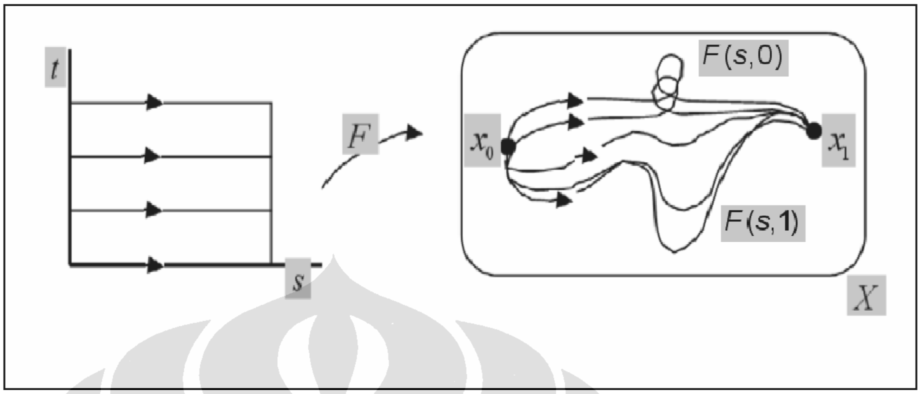
Definisi 2.10 Jika f dan g adalah intasan di X dengan titik awal x_0 dan titik akhir x_1, f disebut homotopik lintasan dengan g jika terdapat fungsi kontinu $F: I \times I \rightarrow X$ dimana

$$F(s,0) = f(s) \text{ dan } F(s,1) = g(s)$$

$$F(0,t) = x_0 \text{ dan } F(1,t) = x_1$$

untuk setiap $s,t \in I$. F dikatakan sebagai sebuah homotopi lintasan antara f dan g. Jika f homotopik lintasan dengan g, maka ditulis $f \simeq_p g$.

Gambaran dari homotopi lintasan dapat dilihat pada Gambar 2.2



Gambar 2.2 Gambar homotopi lintasan

Pada [2] diberikan penjelasan bahwa relasi homotopi lintasan atau $\simeq_p$ adalah sebuah relasi ekuivalen, $\simeq_p$ adalah suatu relasi antara lintasan-lintasan yang mempunyai titik-titik ujung yang sama, misalkan dari x_0 ke x_1, $\simeq_p$ membagi lintasan-lintasan tersebut ke dalam kelas-kelas. Misalkan f adalah lintasan pada X dari x_0 ke x_1, kelas homotopi lintasan $[f]$ di X adalah sebuah kumpulan dari lintasan-lintasan di X yang homotopik lintasan dengan f dan dituliskan dengan $[f] = \{g \mid g \simeq_p f, g(0) = x_0 \text{ dan } g(1) = x_1\}$.

Misalkan f adalah lintasan di X dari x_0 ke x_1, dan g adalah lintasan di X dari x_1 ke x_2, maka terdapat operasi perkalian $*$ yang mengoperasikan f dengan g.

Definisi 2.11 Jika $f: I \to X$ adalah lintasan di X dari x_0 ke x_1 dan $g: I \to X$ adalah lintasan di X dari x_1 ke x_2. Perkalian $f * g$ adalah fungsi h yang diberikan dengan persamaan

$$h(s) = \begin{cases} f(2s) & , s \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2s-1), & s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

h adalah lintasan di X dari x_0 ke x_2.

Misalkan f dan g adalah lintasan di X dengan $f(1) = g(0)$, maka terdapat operasi antara kelas homotopi lintasan $[f]$ dan $[g]$ yaitu $[f]*[g] = [f * g]$ dengan $*$ adalah operasi seperti pada definisi 2.11. $[f]*[g]$ tidak terdefinisi jika $f(1) \neq g(0)$. Misalkan f adalah lintasan di X dari x_0 ke x_1, terdapat suatu lemma pada [1] yang mengatakan bahwa $[f]*[e_{x_1}]$ dan $[e_{x_0}]*[f]$ tidak akan mengubah bentuk $[f]$. Lemma tersebut akan diberikan pada Lemma 2.6, tetapi pembuktiannya tidak disertakan.

Lemma 2.6 jika f adalah lintasan di X dari x_0 ke x_1, maka

$$[f]*[e_{x_1}] = [f] \text{ dan } [e_{x_0}]*[f] = [f]$$

Operasi perkalian antara dua kelas homotopi lintasan dalam sebuah ruang topologi tidak selalu terdefinisi karena titik-titik ujungnya belum tentu sama, tetapi seandainya diambil sebuah titik x_0 pada X sebagai titik basis *loop*, maka pada kelas-kelas homotopi lintasan *loop* tersebut, operasi perkalian antar kelas homotopi lintasan dapat didefinisikan. Himpunan kelas-kelas *loop* ini disebut grup fundamental yang berbasis di x_0.

Definisi 2.12 Himpunan kelas homotopi lintasan dari loop berbasiskan di x_0, dengan operasi $*$, disebut grup fundamental dari X berdasarkan titik basis x_0 yang dinotasikan dengan $\pi_1(X, x_0)$.

Lemma 2.7 dibawah yang merujuk pada [1] memberikan pernyataan bahwa grup fundamental yang didefinisikan pada Definisi 2.12 akan membentuk suatu grup dengan operasi $*$.

Lemma 2.7 $\pi_1(X, x_0)$ adalah sebuah grup dengan operasi $*$. Elemen identitas di $\pi_1(X, x_0)$ adalah $[e_{x_0}] = \{g \mid g \simeq_p e_{x_0}, g(0) = g(1) = x_0\}$.

Untuk mempelajari sifat grup fundamental pada suatu ruang yang terhubung lintasan, cukup dilihat sifat grup fundamental pada sebuah titik x_0 pada ruang tersebut karena grup fundamental di titik yang lain isomorfik dengan titik x_0.

Lemma 2.8 Jika X terhubung lintasan dan $x_0, x_1 \in X$, maka $\pi_1(X, x_0)$ isomorfik dengan $\pi_1(X, x_1)$.

Pembuktian dari Lemma 2.8 yang terdapat pada [3] tidak diberikan untuk alasan efisiensi penulisan.

Pada ruang yang terhubung lintasan, jika grup fundamentalnya trivial untuk setiap titik pada ruang tersebut, maka ruang tersebut dikatakan terhubung sederhana.

Definisi 2.13 Ruang X dikatakan terhubung sederhana jika X terhubung lintasan dan $\pi_1(X, x_0)$ adalah grup trivial yaitu $\pi_1(X, x_0) = \{[e_{x_0}]\}$ untuk setiap $x_0 \in X$.