

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1. Latar Belakang

Ruang topologi adalah sebuah himpunan yang mempunyai suatu topologi. Topologi dari himpunan  $X$  adalah koleksi yang berisi himpunan-himpunan bagian dari  $X$  yang gabungan dan irisan dari setiap anggotanya termasuk dalam koleksi ini, topologi  $X$  juga harus memuat himpunan kosong dan  $X$  sendiri.

Salah satu hal yang menjadi masalah dasar dalam topologi adalah menentukan apakah dua ruang sama secara topologi atau tidak. Dua ruang yang sama secara topologi akan memiliki kesamaan dalam semua sifat topologi sehingga jika diketahui terdapat suatu sifat topologi yang berlaku pada sebuah ruang topologi, sifat tersebut juga berlaku pada ruang lain yang sama secara topologi. Secara intuisi, dua ruang dikatakan sama secara topologi jika ruang yang satu dapat dideformasi menjadi ruang yang lain tanpa ada bagian yang dipotong atau disatukan. Sedangkan secara matematis, dua ruang dikatakan sama secara topologi jika terdapat suatu homeomorfisma, yaitu fungsi satu-satu dan pada yang kontinu dengan invers yang juga kontinu, antara kedua ruang tersebut. Jika demikian, kedua ruang tersebut dikatakan homeomorfik. Sama halnya dengan isomorfisma grup dalam aljabar yang mempertahankan struktur aljabar suatu grup,

homeomorfisma juga mempertahankan struktur atau sifat topologi dari suatu ruang. Untuk menunjukkan dua ruang topologi tidak homeomorfik dapat dilakukan dengan menunjukkan terdapat sifat topologi yang berlaku pada ruang yang satu tetapi tidak berlaku pada ruang lainnya.

Jika dilihat dari bentuknya,  $S^2$ , *torus*,  $P^2$ , dan *figure eight* dapat dikatakan tidak homeomorfik, tetapi jika dilihat dari sifat topologi secara umum seperti kekompakan, keterhubungan, dan lain-lain, keempat ruang ini memiliki banyak sifat yang sama sehingga seolah-olah ruang-ruang ini saling homeomorfik. Tabel 1.1 akan memperlihatkan bahwa keempat ruang ini mempunyai banyak keserupaan dalam sifat topologi.

|                    | $S^2$ | <i>Torus</i> | $P^2$ | <i>Figure eight</i> |
|--------------------|-------|--------------|-------|---------------------|
| Kompak             | Ya    | Ya           | Ya    | Ya                  |
| Terhubung          | Ya    | Ya           | Ya    | Ya                  |
| Terhubung lokal    | Ya    | Ya           | Ya    | Ya                  |
| Terhubung lintasan | Ya    | Ya           | Ya    | Ya                  |

**Tabel 1.1** Tabel sifat-sifat dasar topologi pada masing-masing ruang

Karena banyaknya keserupaan sifat topologi yang dimiliki, sulit untuk menemukan sifat topologi yang berlaku pada ruang yang satu tetapi tidak berlaku pada ruang lainnya untuk menunjukkan bahwa keempat ruang tersebut tidak homeomorfik. Cara lain yang dapat digunakan adalah dengan

mempelajari grup fundamental dari masing-masing ruang. Jika grup fundamental dua ruang tersebut memiliki perbedaan sifat, maka kedua ruang tersebut tidak homeomorfik.

Grup fundamental adalah salah satu topik dasar dalam topologi aljabar, yaitu topologi yang menggunakan sifat aljabar dalam mempelajari sifat topologi. Grup fundamental sendiri merupakan suatu bentuk grup pada ruang topologi yang elemennya merupakan kelas-kelas *loop* yang berada pada ruang tersebut.

Sebagian besar ruang yang dipelajari dalam topologi merupakan ruang yang kompleks, sehingga sulit untuk mempelajari sifat-sifat topologi yang dimiliki ruang-ruang tersebut. Jika terdapat homeomorfisma antara ruang topologi yang kompleks dengan ruang topologi lain yang sudah diketahui sifatnya, maka sifat-sifat topologi ruang yang kompleks ini dapat dipelajari melalui sifat ruang tersebut. Kulit bola atau  $S^2$ , *torus*, bidang proyeksi atau  $P^2$ , dan *figure eight* adalah ruang-ruang topologi yang sering menjadi objek dasar dalam mempelajari ruang-ruang topologi yang lebih kompleks. Seringkali, untuk membandingkan dua ruang topologi yang kompleks saling homeomorfik atau tidak, ruang-ruang kompleks itu masing-masing akan dilihat terlebih dahulu apakah homeomorfik dengan salah satu dari keempat ruang ini, sehingga perbandingan dua ruang kompleks dapat disederhanakan menjadi membandingkan ruang-ruang dari  $S^2$ , *torus*,  $P^2$ ,

atau *figure eight*. Oleh karena itu, akan berguna jika diketahui terlebih dahulu apakah keempat ruang ini saling homeomorfik atau tidak.

Dalam skripsi ini akan dipelajari perbedaan yang terdapat pada grup fundamental milik  $S^2$ , *torus*,  $P^2$  dan *figure eight*, sehingga dapat disimpulkan bahwa keempat ruang tersebut tidak saling homeomorfik.

### 1.2. Rumusan Masalah

Memeriksa apakah  $S^2$ , *Torus*,  $P^2$  dan *Figure Eight* saling homeomorfik.

### 1.3. Tujuan Penulisan

Mempelajari pembentukan grup fundamental dari  $S^2$ , *Torus*,  $P^2$  dan *Figure Eight* dan mempelajari sifat-sifatnya. Mempelajari perbedaan antar grup fundamental tersebut untuk menunjukkan bahwa keempat ruang tersebut tidak homeomorfik.

### 1.4. Sistematika Penulisan

Skripsi ini terdiri dari empat bab. Bab I berisi pendahuluan, Bab II merupakan dasar teori mengenai topologi, grup fundamental, dan teori pendukung lainnya. Bab III berisi pembahasan mengenai sifat-sifat grup fundamental dari  $S^2$ , *Torus*,  $P^2$  dan *Figure Eight*, sedangkan Bab IV berisi kesimpulan dari hasil yang telah diperoleh pada Bab III.