LAMPIRAN 1

Pembuktian Koefisien Korelasi Bernilai antara –1 sampai dengan +1

Akan dibuktikan :

Koefisien korelasi dari dua variabel random *X* dan *Y* bernilai antara –1 sampai +1 yaitu, $-1 \le \rho \le 1$.

Bukti :

Definisikan suatu fungsi $h(v) = E\left\{[(X-\mu_1)+v(Y-\mu_2)]^2\right\}$ dimana *v* adalah bilangan real dan bukan fungsi dari variabel random *X* maupun variabel random *Y*. Perhatikan :

$$\begin{aligned} h(v) &= E\left\{[(X-\mu_1)+v(Y-\mu_2)]^2\right\} \\ &= E\left\{(Y-\mu_2)^2 v^2 + 2v(X-\mu_1)(Y-\mu_2) + (X-\mu_1)^2\right\} \\ &= E(Y-\mu_2)^2 v^2 + 2vE((X-\mu_1)(Y-\mu_2)) + E(X-\mu_1)^2 \end{aligned}$$

terlihat bahwa $h(v)$ adalah fungsi kuadratik nonnegatif sehingga diskriminan dari $h(v)$ bernilai lebih kecil atau sama dengan nol.

Pandang diskriminan dari $h(v)$:

$$D = \{2E((X-\mu_1)(Y-\mu_2))\}^2 - 4E(X-\mu_1)^2 E(Y-\mu_2)^2 \le 0$$

$$\Leftrightarrow 4\{E((X-\mu_1)(Y-\mu_2))\}^2 \le 4E(X-\mu_1)^2 E(Y-\mu_2)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\{E((X-\mu_1)(Y-\mu_2))\}^2}{E(X-\mu_1)^2 E(Y-\mu_2)^2} \le 1$$

$\Leftrightarrow \rho^2 \le 1$ (dari persamaan 2.1.3)

$$\Leftrightarrow -1 \le \rho \le 1$$

Dengan demikian terbukti bahwa koefisien korelasi dari dua variabel random bernilai antara –1 sampai +1 yaitu $-1 \le \rho \le 1$.

LAMPIRAN 2

Pembuktian Koefisien Korelasi *Pearson* Bernilai antara –1 sampai dengan +1

Akan dibuktikan :

Koefisien korelasi *Pearson* dari dua variabel random *X* dan *Y* bernilai antara –1 sampai +1 yaitu, $-1 \le r \le 1$.

Bukti :

Definisikan suatu fungsi $h(v) = \sum_{i=1}^{n}[(x_i - \bar{x}) + v(y_i - \bar{y})]^2$ dimana *v* adalah bilangan real dan bukan fungsi dari variabel random *X* maupun variabel random *Y*. Perhatikan :

$$
\begin{aligned}
h(v) &= \sum_{i=1}^{n}[(x_i - \bar{x}) + v(y_i - \bar{y})]^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}[(y_i - \bar{y})^2 v^2 + 2v(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) + (x_i - \bar{x})^2] \\
&= \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 v^2 + 2v\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) + \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2
\end{aligned}
$$

terlihat bahwa $h(v)$ adalah fungsi kuadratik nonnegatif sehingga diskriminan dari $h(v)$ bernilai lebih kecil atau sama dengan nol.

Pandang diskriminan dari $h(v)$:

$$D = \left\{2\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})\right\}^2 - 4\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 4\left\{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})\right\}^2 \leq 4\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left\{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})\right\}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2} \leq 1$$

$\Leftrightarrow r^2 \leq 1$ (dari persamaan 2.1.1.1)

$$\Leftrightarrow -1 \leq r \leq 1$$

Dengan demikian terbukti bahwa koefisien korelasi *Pearson* dari dua variabel random bernilai antara –1 sampai +1 yaitu $-1 \leq r \leq 1$.

LAMPIRAN 3

Penurunan p.d.f Normal Bivariat

Akan dibuktikan :

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(\frac{-q}{2}\right) \quad , -\infty<x<\infty\,;\ -\infty<y<\infty$$

dimana $\sigma_1>0, \sigma_2>0,\ -1<\rho<1,$ dan

$$q=\frac{1}{1-\rho^2}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right] \qquad (1)$$

adalah p.d.f normal bivariat dari variabel random *X* dan *Y*

dan jika distribusi gabungan dari X dan Y adalah normal bivariat maka

$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^{\ 2})$ dan $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$.

Bukti :

Definisikan $f_1(x)$ dengan $f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dy$, dari persamaan (1) didapat :

$$\begin{aligned}(1-\rho^2)q&=\left[\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)-\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\right]^2+(1-\rho^2)\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\\&=\left(\frac{y-b}{\sigma_2}\right)^2+(1-\rho^2)\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\end{aligned}$$

dimana $b=\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)$.

Berarti :

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2\pi}\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp - \left\{ \frac{(y-b)^2}{2\sigma_2{}^2(1-\rho^2)} + \frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} \right\} \; dy$$

$$= \frac{\exp\left[- {(x-\mu_1)^2}\big/{2\sigma_1^2} \right]}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left[- {(y-b)^2}\big/{2\sigma_2^2(1-\rho^2)} \right]}{\sigma_2\sqrt{(1-\rho^2)}\sqrt{2\pi}} \; dy}_{=1}$$

$$= \frac{\exp\left[- {(x-\mu_1)^2}\big/{2\sigma_1^2} \right]}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \qquad (2)$$

kemudian perhatikan :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left[-(x-\mu_1)^2\big/{2\sigma_1^2} \right]}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\,dx = 1$$

karena $f(x,y) > 0$ dan $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy\,dx = 1$ maka terbukti bahwa $f(x,y)$

adalah suatu p.d.f dari variabel *X* dan *Y*, yaitu p.d.f normal bivariat.

Dari persamaan (2) terlihat $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, selanjutnya pandang :

$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$ dari persamaan (1) didapat :

$$(1-\rho^2)q = \left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1} \right) - \rho \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} \right) \right]^2 + (1-\rho^2)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} \right)^2$$

$$= \left(\frac{x-a}{\sigma_1} \right)^2 + (1-\rho^2)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} \right)^2$$

dimana $a = \mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2)$.

Berarti :

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2\pi}\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp-\left\{\frac{(x-a)^2}{2\sigma_1^{\ 2}(1-\rho^2)} + \frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\} dx$$

$$= \frac{\exp\left[-{(y-\mu_2)^2}\big/{2\sigma_2^2}\right]}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left[-{(x-a)^2}\big/{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}\right]}{\sigma_1\sqrt{(1-\rho^2)}\sqrt{2\pi}} dx}_{=1}$$

$$= \frac{\exp\left[-{(y-\mu_2)^2}\big/{2\sigma_2^2}\right]}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} \qquad (3)$$

dari (3) terlihat $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Dengan demikian, terbukti bahwa jika distribusi gabungan dari X dan Y adalah normal bivariat maka $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^{\ 2})$ dan $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Untuk kasus distribusi gabungan X dan Y adalah normal bivariat standar maka $X \sim N(0,1)$ dan $Y \sim N(0,1)$.

LAMPIRAN 4

Pembuktian Teorema 3.1

Teorema 3.1 :

Misalkan $f \in C^2[a,b]$. Jika $p \in [a,b]$ sedemikian sehingga $f(p)=0$ dan $f\,'(p) \neq 0$ maka ada $\delta > 0$ sedemikian sehingga metode newton raphson menghasilkan barisan $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ yang konvergen ke p untuk sembarang nilai awal $p_0 \in [p-\delta, p+\delta]$.

Bukti :

Dalam bukti ini *newton raphson* akan dipandang sebagai iterasi fungsi $p_n = g(p_{n-1})$, $\forall\, n \geq 1$ dengan $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f\,'(x)}$. Misalkan k sembarang bilangan di (0, 1). Pertama akan dicari suatu interval $[p-\delta, p+\delta]$ dimana g memetakan pada dirinya sendiri dan $|g\,'(x)| \leq k$, $\forall\, x \in (p-\delta, p+\delta)$.

Karena $f\,'(p) \neq 0$ dan $f\,'$ kontinu maka ada

$\delta_1 > 0 \ni f'(x) \neq 0\ \forall\, x \in [p-\delta_1, p+\delta_1] \subset [a,b]$. Dengan demikian, g terdefinisi dan kontinu pada $[p-\delta_1, p+\delta_1]$ serta

$$\begin{aligned} g\,'(x) &= 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \\ &= \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \end{aligned} \qquad \forall\, x \in [p-\delta_1, p+\delta_1]$$

dan karena $f \in C^2[a,b]$ didapat $g \in [p-\delta_1, p+\delta_1]$.

Dengan asumsi $f(p)=0$ maka $g'(p)=\frac{f(p)f''(p)}{[f'(p)]^2}=0$. Karena *g*' kontinu dan

0< k < 1 maka ada δ dengan $0<\delta<\delta_1$ dan $|g'(x)|\le k$, $\forall\, x\in(p-\delta, p+\delta)$.

Jika $x\in[p-\delta, p+\delta]$, berdasarkan *mean value theorem* maka untuk suatu ε

antara *x* dan *p* , $|g(x)-g(p)|=|g'(\varepsilon)||x-p|$ sehingga

$|g(x)-p|=|g(x)-g(p)|=|g'(\varepsilon)||x-p|\le k|x-p|<|x-p|$

Karena $x\in[p-\delta, p+\delta]$ maka $|x-p|<\delta$ dan $|g(x)-p|<\delta$. Ini menunjukkan

$g:[p-\delta, p+\delta]\rightarrow[p-\delta, p+\delta]$. Semua hipotesis dari *fixed point theorem*

terenuhi untuk $g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$, sehingga $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ yang didefinisikan dengan

$p_n=g(p_{n-1})$ konvergen ke p $\forall$ $p_0\in[p-\delta, p+\delta]$.

LAMPIRAN 5

Contoh Output Program R.2.6.1 untuk Simulasi Data Normal Bivariat

Perintah simulasi dengan perangkat lunak R.2.6.1 :

```
> library(mvtnorm)
> library(sfsmisc)
> library(polycor)
> set.seed(12345)
> sigma <- matrix(c(1,0.705,0.705,1), ncol=2)
> data <- rmvnorm(50000, c(0, 0), sigma=sigma)
> U <- data[,1]
> V<- data[,2]
> cor(U, V)
[1] 0.7061143
> for(n in c(200,500,1000,5000)){  #simulasi pengambilan sampel#
+ pc<-vector(length=10)
+ kt<-vector(length=10)
+ for(i in 1:10){
+ sam<-sample(n,replace=F)
+ X<-cut(U[sam],c(-Inf,-1.5,-0.5,0.5,1.5,Inf))    #pengkategorian data#
+ Y<-cut(V[sam],c(-Inf,-1.5,-0.5,0.5,1.5,Inf))
+ pc[i]<-polychor(X, Y, ML=FALSE)
+ kt[i]<-cor(X,Y,method="kendall")
+ }
+ cat("untuk n =",n,"\n")
+ cat("mean kt =",mean(kt),"\n")
+ RBkt<-abs((cor(U,V)-mean(kt))/cor(U,V)*100)
+ cat("dengan RB =",RBkt,"%","\n")
+ cat("mean pc =",mean(pc),"\n")           #mean korelasi polychoric#
+ RB<-abs((cor(U,V)-mean(pc))/cor(U,V)*100)
+ cat("dengan RB =",RB,"%","\n","\n")
+ }
```

Output :

untuk n = 200
mean kt = 0.2981833
dengan RB = 57.77125 %
mean pc = 0.6819898
dengan RB = 3.416511 %

untuk n = 500
mean kt = 0.3140771
dengan RB = 55.52036 %
mean pc = 0.74642
dengan RB = 5.708107 %

untuk n = 1000
mean kt = 0.2613970
dengan RB = 62.98093 %
mean pc = 0.7286923
dengan RB = 3.197503 %

untuk n = 5000
mean kt = 0.2122205
dengan RB = 69.9453 %
mean pc = 0.7131984
dengan RB = 1.003254 %

LAMPIRAN 6

Contoh Output Program R.2.6.1 untuk Simulasi Data Bukan Normal Bivariat

Perintah simulasi dengan perangkat lunak R.2.6.1 :

```
> library(mvtnorm)
> library(sfsmisc)
> library(polycor)
> library(moments)
> set.seed(12345)
> U1<-rnorm(10000,mean=0,sd=1)
> V1<-U1+rnorm(10000,mean=0,sd=1)
> US<-sort(U1,decreasing=FALSE)
> VS<-sort(V1,decreasing=FALSE)
> U<-c(U1,rep(US[8001:10000],times=15),rep(US[7501:10000],times=4))
> V<-c(V1,rep(VS[7501:10000],times=16))
> skewness(U)
[1] -1.223998
> skewness(V)
[1] -1.013101
> kurtosis(U)
[1] 5.880287
> kurtosis(V)
[1] 5.718045
> cor(U,V)
[1] 0.7242162
> for(n in c(200,500,1000,5000)){  #simulasi pengambilan sampel#
+ pc<-vector(length=10)
+ kt<-vector(length=10)
+ for(i in 1:10){
+ sam<-sample(n,replace=F)
+ X<-cut(U[sam],c(-Inf,-1.5,-0.5,0.5,1.5,Inf))    #pengkategorian data#
+ Y<-cut(V[sam],c(-Inf,-1.5,-0.5,0.5,1.5,Inf))
+ pc[i]<-polychor(X, Y, ML=FALSE)
+ kt[i]<-cor(X,Y,method="kendall")
+ }
+ cat("untuk n =",n,"\n")
+ cat("mean kt =",mean(kt),"\n")
```

```
+ RBkt<-abs((cor(U,V)-mean(kt))/cor(U,V)*100)
+ cat("dengan RB =",RBkt,"%","\n")
+ cat("mean pc =",mean(pc),"\n")            #mean korelasi polychoric#
+ RB<-abs((cor(U,V)-mean(pc))/cor(U,V)*100)
+ cat("dengan RB =",RB,"%","\n","\n")
+ }
```

Output :

untuk n = 200
mean kt = 0.3355082
dengan RB = 53.67292 %
mean pc = 0.7194528
dengan RB = 0.6577321 %

untuk n = 500
mean kt = 0.2755807
dengan RB = 61.94772 %
mean pc = 0.7138625
dengan RB = 1.429639 %

untuk n = 1000
mean kt = 0.2602275
dengan RB = 64.0677 %
mean pc = 0.7374703
dengan RB = 1.830137 %

untuk n = 5000
mean kt = 0.2185577
dengan RB = 69.82149 %
mean pc = 0.7194813
dengan RB = 0.6537967 %