BAB 1
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Mayoritas peralatan informasi teleknologi ditempatkan pada suatu kondisi suhu ruang yang khusus yang tidak dipengaruhi oleh fluaktuatif suhu lingkungan. Karena itu biasanya peralatan tersebut berada di suatu ruang yang disebut ruang datacom. Suhu ruang datacom di Indonesia umumnya masih dikendalikan dengan mengandalkan pada sistem tata udara ruangan biasa. Dampak yang timbul dari kondisi suhu dan kelembaban udara yang fluktuatif pada ruang datacom adalah rentan terhadap *thermal shutdown*, *corrosion and short circuit* yang dapat menyebabkan kerusakan pada peralatan. Kerugian lainnya yang timbul adalah pengguna terbebani oleh besarnya energi yang dikonsumsi. Untuk itu diperlukan pengendalian yang optimal pada sistem tata udara yang presisi agar kelembaban dan suhu di dalam ruang datacom dapat dijaga konstan.

Precision Air Conditioning (PAC) atau sistem tata udara presisi menghasilkan dua keluaran yang harus di jaga konstan yaitu suhu dan kelembaban. Untuk mengkondisikan kedua keluaran tersebut maka ada variable lain yang akan mengatur yaitu putaran motor kompressor dan bukaan katup aliran refrigerant. Kedua variable ini disebut masukan. Jadi sistem PAC ini mempunyai dua masukan dan dua keluaran atau dengan istilah MIMO (*Multiple Input Multi Output*).

Permasalahan pada sistem multivariable adalah diantara masukannya saling mempengaruhi terhadap keadaan keluarannya. Keadaan ini akan berpengaruh terhadap nilai acuan yang diharapkan. Pengendali *Model Predictive Control* (MPC) adalah salah satu pengendali yang mampu mengatasi permasalahan tersebut. MPC banyak digunakan pada bidang industri karena banyak kelebihannya dan mampu mengatasi pengendalian pada kondisi keadaan variable yang kompleks dibandingkan dengan pengendali konvensional. Pada pengendali konvensional, batasan-batasan (*constraints*) seperti amplitudo dan *slew rate* sinyal kendali tidak diperhitungkan pada proses pengendalian. Hal ini tentu menyebabkan hasil kendali menjadi kurang baik, terutama jika terjadi pemotongan paksa terhadap sinyal kendali sebelum masuk ke *plant*. Pemotongan sinyal kendali biasanya terjadi ketika nilai trayektori acuan berubah secara mendadak. Kondisi ini tidak akan terjadi pada MPC karena pengendali dapat memprediksi keluaran proses yang akan datang serta tidak mengabaikan batasan-batasan yang ada.

Banyaknya faktor yang harus diperhitungkan pada pengendali MPC membuat algoritma MPC menjadi sangat panjang dan rumit. Masalah utama metode MPC adalah pada model, karena itu dibutuhkan bentuk model yang baik yang benar-benar mewakili bentuk model plant yang sebenarnya. Karena MPC adalah salah satu pengendali yang berbasiskan pada model.

1.2 Perumusan Masalah

Dari uraian permasalahan yang ada, maka ada beberapa hal yang bisa dirumuskan yaitu:

1. Bagaimana merencanakan suatu model sistem PAC yang dapat mengedalikan kondisi suhu dan kelembaban ruangan yang sesuai dengan standar yang berlaku.
2. Bagaimana menetapkan parameter-parameter dan batasan-batasan yang akan mendukung pada model sistem yang akan dibuat.
3. Bagaimana membuat sistem algoritma pengontrolan MPC yang mampu memberikan sistem pengendalian yang optimal.

1.3 Tujuan Penelitian

Membuat algoritma MPC untuk mengontrol sistem tata udara presisis dan mencari serta menetapkan nilai parameter-parameter horizon dan matrik bobot yang akan menghasilkan bentuk keluaran yang sesuai dengan nilai acuan yang ditetapkan.

1.4 Batasan Masalah

Pada tesis ini, penelitian dilakukan pada penerapan model matematis dari sistem tata udara presisi, kemudian dilakukan perancangan algoritma MPC untuk simulasi pengendalian dengan model yang diturunkan dari sistem refrigerator dengan asumsi sebagai berikut:

1. Refrigerant yang dipakai yaitu type R134a.
2. Tekanan pada kompresor dianggap konstan
3. Suhu evaporasi dan kondensasi dibuat konstan
4. faktor-faktor loses yang terjadi pada sistem diabaikan.

1.5 Metodologi Penelitian

Pada penelitian ini, dilakukan penurunan matematik dari sebuah model PAC, kemudian dibuatkan sebuah simulasi untuk melihat karakteristik dari model tersebut. Model kemudian dilinierisasi pada daerah titik setimbangnya dengan menggunakan simulink. Hasil linierisasi berupa matriks ruang keadaan time invariance yang kemudian didiskritkan. Matriks tersebut sudah mewakili model linier yang sebenarnya. Matriks tersebut kemudian dimasukan ke dalam algoritma pengendali MPC sebagai model.

1.6 Sistematika Penulisan

Penulisan tesis ini akan dibagi ke dalam lima bab. Bab satu merupakan pendahuluan yang berisi latar belakang, perumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, metodologi penelitian, dan sistematika penulisan. Bab dua membahas konsep model predictive control sebagai pengendali. Bab tiga membahas tentang pemodelan dan perancangan pengendali MPC. Bab empat membahas hasil simulasi MPC dan analisis dari. Bab lima berisi kesimpulan.

BAB 2
MODEL PREDICTIVE CONTROL

2.1. Konsep Dasar *Model Predictive Control*

Model Predictive Control (MPC) atau sistem kendali prediktif termasuk dalam konsep perancangan pengendali berbasis model proses, dimana model proses digunakan secara eksplisit untuk merancang pengendali dengan cara meminimumkan suatu fungsi kriteria. Ide yang mendasari pada setiap jenis MPC adalah:

1. Penggunaan model proses secara eksplisit untuk memprediksi keluaran proses yang akan datang dalam rentang waktu tertentu (*horizon*).
2. Perhitungan rangkaian sinyal kendali dengan meminimasi suatu fungsi kriteria.
3. Strategi surut; pada setiap waktu pencuplikan (pada waktu k) *horizon* dipindahkan menuju waktu pencuplikan berikutnya (pada waktu $k+1$) dengan melibatkan pemakaian sinyal kendali pertama (yaitu $u(k)$) untuk mengendalikan proses, dan kedua prosedur di atas diulang dengan menggunakan informasi terakhir.

Metode MPC memiliki beberapa keunggulan dibandingkan dengan metode pengendali lainnya, di antaranya adalah :

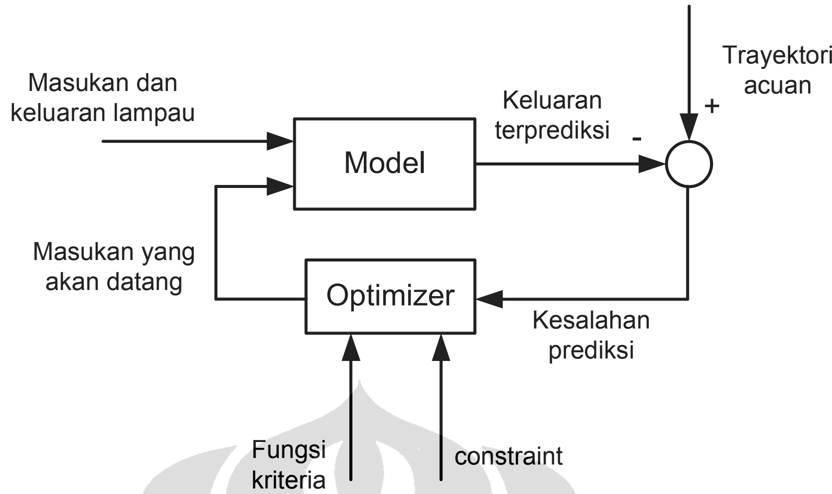
1. Konsepnya sangat intuitif serta penalaannya mudah.
2. Dapat digunakan untuk mengendalikan proses yang beragam, mulai dari proses yang sederhana, hingga proses yang kompleks, memiliki waktu tunda yang besar, *non-minimum phase* atau proses yang tidak stabil.
3. Dapat menangani sistem *multivariable*.
4. Mempunyai kompensasi terhadap waktu tunda.
5. Mempunyai kemampuan dari pengendali *feed forward* untuk mengkompensasi gangguan yang terukur.
6. Mudah untuk mengimplementasikan pengendali yang diperoleh.
7. Dapat memperhitungkan batasan atau *constraint* dalam merancang pengendali.

8. Sangat berguna jika sinyal acuan untuk masa yang akan datang diketahui.

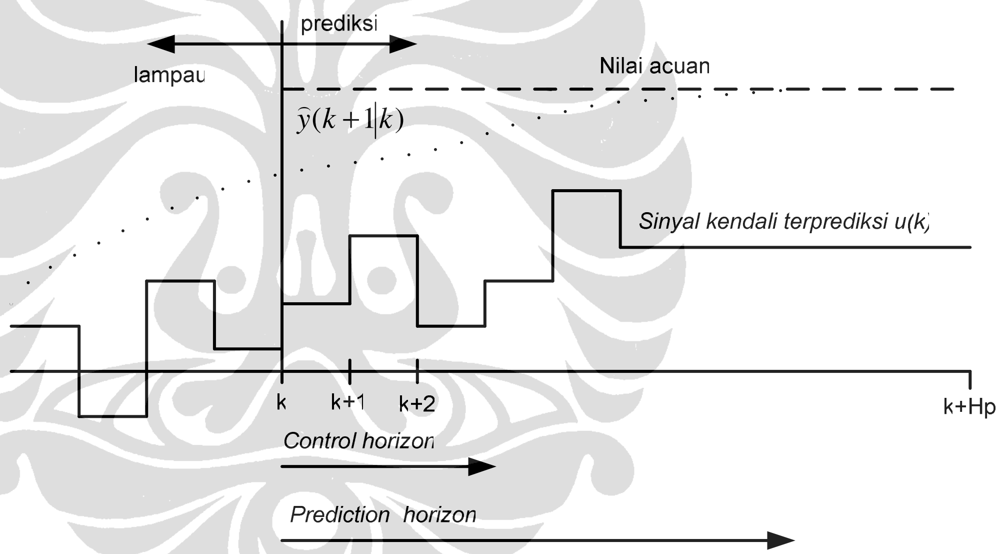
Selain beragam keuntungan yang dimiliki, metode MPC juga mempunyai kelemahan, yaitu masalah penurunan aturan sinyal kendali yang cukup kompleks dan keperluan akan model proses yang baik.

Struktur dasar dari pengendali MPC dapat dilihat pada gambar 2.1. Metodologi semua jenis pengendali yang termasuk kedalam kategori MPC dapat dikenali oleh strategi berikut:

1. Keluaran proses yang akan datang untuk rentang *horizon Hp* yang ditentukan yang dinamakan sebagai *prediction horizon*, diprediksi pada setiap waktu pencuplikan dengan menggunakan model proses. Keluaran proses terprediksi ini $y(k+i|k)$ untuk $i = 1 \dots Hp$ bergantung pada nilai masukan dan keluaran lampau dan kepada sinyal kendali yang akan datang $u(k+i|k)$, $i = 0 \dots Hp\text{-}1$, yang akan digunakan sistem dan harus dihitung.
2. Serangkaian sinyal kendali dihitung dengan mengoptimasi suatu fungsi kriteria yang ditetapkan sebelumnya, dengan tujuan untuk menjaga proses sedekat mungkin terhadap trayektori acuan $r(k+i)$. Fungsi kriteria tersebut umumnya berupa suatu fungsi kuadratik dari kesalahan antara sinyal keluaran terprediksi dengan trayektori acuan. Solusi eksplisit dapat diperoleh jika fungsi kriteria adalah kuadratik, model linier, dan tidak ada *constraints*, jika tidak, optimasi iteratif harus digunakan untuk memecahkannya. Langkah pertama dan kedua dapat diilustrasikan pada Gambar 2.2.
3. Sinyal kendali $u(k|k)$ dikirim ke proses, sedangkan sinyal kendali terprediksi berikutnya dibuang, karena pada pencuplikan berikutnya $y(k+1)$ sudah diketahui nilainya. Maka langkah pertama diulang dengan nilai keluaran proses yang baru dan semua prosedur perhitungan yang diperlukan diperbaiki. Sinyal kendali yang baru $u(k+1|k+1)$ (nilainya berbeda dengan $u(k+1|k)$) dihitung dengan menggunakan konsep *receding horizon*.



Gambar 2.1. Struktur pengendali MPC



Gambar2.2. Kalkulasi keluaran proses dan pengendali terprediksi

2.2. Fungsi Kriteria pada *Model Predictive Control*

Seperti yang telah dinyatakan sebelumnya bahwa perhitungan sinyal kendali pada MPC dilakukan dengan meminimumkan suatu fungsi kriteria. Fungsi kriteria yang digunakan dalam algoritma MPC berbentuk kuadraktik seperti berikut

$$V(k)=\sum_{i=1}^{Hp}\| \underline{\hat{y}}(k+i\mid k)-\underline{r}(k+i\mid k)\|^2_{\underline{Q}(i)}+\sum_{i=0}^{Hu-1}\| \underline{\Delta\hat{u}}(k+i\mid k)\|^2_{\underline{R}(i)} \qquad (2.1)$$

dengan :

$\underline{\hat{y}}(k+i\mid k)$ = keluaran terprediksi untuk *i*-langkah kedepan saat waktu k

$\underline{r}(k+i\mid k)$ = nilai trayektori acuan (*reference trajectory*)

$\underline{\Delta\hat{u}}(k+i\mid k)$ = perubahan nilai sinyal kendali terprediksi untuk *i*-langkah kedepan saat waktu k

$\underline{Q}(i)$ dan $\underline{R}(i)$ = faktor bobot

Hp = *prediction horizon*

Hu = *control horizon*

Dari persamaan fungsi kriteria tersebut, selalu dibuat asumsi bahwa nilai *Hu* < *Hp* dan $\underline{\Delta\hat{u}}(k+i\mid k)=0$ untuk $i \geq Hu$, sehingga nilai masukan terprediksi $\underline{\hat{u}}(k+i\mid k)=\underline{\hat{u}}(k+Hu-i\mid k)$ untuk semua $i \geq Hu$ seperti yang terlihat pada Gambar 2.2.

Bentuk dari fungsi kriteria pada persamaan (2.1) menyatakan bahwa vektor kesalahan $\underline{\hat{y}}(k+i\mid k)-\underline{r}(k+i\mid k)$ dibebankan pada setiap rentang *prediction horizon*. Walaupun demikian tetap ada kemungkinan untuk menghitung vektor kesalahan pada titik-titik tertentu saja dengan cara mengatur matriks faktor bobot *Q(i)* bernilai nol pada langkah yang diinginkan. Selain vektor kesalahan, fungsi kriteria pada persamaan (2.1) juga memperhitungkan perubahan vektor masukan dalam rentang *control horizon*. Pemilihan penggunaan $\underline{\Delta\hat{u}}(k+i\mid k)$ yang pada fungsi kriteria bertujuan untuk meminimumkan perubahan sinyal kendali yang masuk ke *plant*.

2.3. Model Proses

Pada pembahasan skripsi ini, model proses yang digunakan berupa model ruang keadaan diskrit linier seperti berikut :

$$\underline{x}(k+1)=\underline{A}\underline{x}(k)+\underline{B}\underline{u}(k) \qquad (2.2)$$

$$\underline{y}(k)=\underline{C}\underline{x}(k) \qquad (2.3)$$

dengan :

$\underline{u}(k)$ = vektor masukan berdimensi-(*l x 1)*

$\underline{x}(k)$ = vektor keadaan berdimensi-(*n x 1)*

$\underline{y}(k)$ = vektor keluaran berdimensi-(*m x 1)*

$\underline{A}$ = matriks keadaan berdimensi *n x n*

$\underline{B}$ = matriks masukan berdimensi *n x l*

$\underline{C}$ = matriks keluaran berdimensi *m x n*

Model ruang keadaan pada persamaan (2.2) dan (2.3) adalah model ruang keadaan untuk proses yang bersifat linier. Pada skripsi ini, vektor masukan $\underline{u}(k)$ dan keluaran $\underline{y}(k)$ masing-masing berdimensi satu.

2.4. Prediksi

Dalam menyelesaikan masalah pengendali prediktif, nilai keluaran terprediksi $\underline{\hat{y}}(k+i\,|\,k)$ harus dapat dihitung dengan menggunakan estimasi terbaik dari variabel keadaan saat ini $\underline{x}(k)$, nilai masukan yang lampau $\underline{u}(k-1)$, dan nilai perkiraan dari perubahan masukan yang akan datang $\underline{\Delta\hat{u}}(k+i\,|\,k)$. Sebelum melangkah lebih jauh, hal pertama yang harus dilakukan adalah memprediksi nilai variabel keadaan dengan melakukan iterasi model ruang keadaan pada persamaan (2.2) dan (2.3). Perhitungan prediksi variabel keadaan adalah sebagai berikut

$$\underline{\hat{x}}(k+1\,|\,k) = \underline{A}\underline{x}(k) + \underline{B}\underline{\hat{u}}(k\,|\,k) \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}\underline{\hat{x}}(k+2\,|\,k) &= \underline{A}\underline{\hat{x}}(k+1\,|\,k) + \underline{B}\underline{\hat{u}}(k+1\,|\,k) \\ &= \underline{A}^2\underline{x}(k) + \underline{A}\underline{B}\underline{\hat{u}}(k\,|\,k) + \underline{B}\underline{\hat{u}}(k+1\,|\,k)\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}\underline{\hat{x}}(k+Hp\,|\,k) &= \underline{A}\underline{\hat{x}}(k+Hp-1\,|\,k) + \underline{B}\underline{\hat{u}}(k+Hp-1\,|\,k) \\ &= \underline{A}^{Hp}\underline{x}(k) + \underline{A}^{Hp-1}\underline{B}\underline{\hat{u}}(k\,|\,k) + \ldots + \underline{B}\underline{\hat{u}}(k+Hp-1\,|\,k)\end{aligned} \tag{2.6}$$

Pada setiap langkah prediksi digunakan $\underline{\hat{u}}(k\,|\,k)$ bukan $\underline{u}(k)$, karena besarnya nilai $\underline{u}(k)$ belum diketahui ketika menghitung prediksi.

Sekarang, diasumsikan bahwa nilai masukan hanya berubah pada waktu k, k+1, …, k+Hu–1, dan setelah itu menjadi konstan, sehingga didapatkan bahwa $\underline{\hat{u}}(k+i\,|\,k) = \underline{\hat{u}}(k+Hu-1\,|\,k)$ untuk $Hu \le i \le Hp$-1. Selanjutnya, perhitungan prediksi diubah sehingga mengandung $\underline{\Delta\hat{u}}(k+i\,|\,k)$ daripada $\underline{\hat{u}}(k+i\,|\,k)$, dengan

$$\underline{\Delta\hat{u}}(k+i\,|\,k) = \underline{\hat{u}}(k+i\,|\,k) - \underline{\hat{u}}(k+i-1\,|\,k) \tag{2.7}$$

dan pada setiap waktu pencuplikan k nilai yang sudah diketahui hanya $\underline{u}(k\text{-}1)$, maka

$$\underline{\hat{u}}(k\,|\,k) = \underline{\Delta\hat{u}}(k\,|\,k) + \underline{u}(k-1\,|\,k) \tag{2.8}$$

$$\underline{\hat{u}}(k+1\,|\,k) = \underline{\Delta\hat{u}}(k+1\,|\,k) + \underline{\Delta\hat{u}}(k\,|\,k) + \underline{u}(k-1\,|\,k) \tag{2.9}$$

$$\vdots$$

$$\underline{\hat{u}}(k+Hu-1\,|\,k) = \underline{\Delta\hat{u}}(k+Hu-1\,|\,k) + \ldots + \underline{\Delta\hat{u}}(k\,|\,k) + \underline{u}(k-1\,|\,k) \tag{2.10}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (2.8) – (2.10) ke persamaan (2.4) – (2.6), diperoleh persamaan

$$\underline{\hat{x}}(k+1\,|\,k) = \underline{A}\underline{x}(k) + \underline{B}\left[\underline{\Delta\hat{u}}(k\,|\,k) + \underline{u}(k-1)\right] \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}\underline{\hat{x}}(k+2\,|\,k) &= \underline{A}^2\underline{x}(k) + \underline{A}\underline{B}\left[\underline{\Delta\hat{u}}(k\,|\,k) + \underline{u}(k-1)\right] \\ &\quad + \underline{B}\underbrace{\left[\underline{\Delta\hat{u}}(k+1\,|\,k) + \underline{\Delta\hat{u}}(k\,|\,k) + \underline{u}(k-1)\right]}_{\underline{\hat{u}}(k+1|k)} \\ &= \underline{A}^2\underline{x}(k) + \left(\underline{A}+\underline{I}\right)\underline{B}\underline{\Delta\hat{u}}(k\,|\,k) + \underline{B}\underline{\Delta\hat{u}}(k+1\,|\,k) + \left(\underline{A}+\underline{I}\right)\underline{B}\underline{u}(k-1)\end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}\underline{\hat{x}}(k+Hu\,|\,k) &= \underline{A}^{Hu}\underline{x}(k) + \left(\underline{A}^{Hu-1} + \ldots + \underline{A} + \underline{I}\right)\underline{B}\underline{\Delta\hat{u}}(k\,|\,k) + \ldots \\ &\quad + \underline{B}\underline{\Delta\hat{u}}(k+Hu-1\,|\,k) + \left(\underline{A}^{Hu-1} + \ldots + \underline{A} + \underline{I}\right)\underline{B}\underline{u}(k-1)\end{aligned} \tag{2.13}$$

Dengan mengacu pada persamaan $\hat{u}(k+i\,|\,k) = \hat{u}(k+Hu-i\,|\,k)$ untuk i>Hu, maka perhitungan prediksi untuk i>Hu adalah

$$\begin{aligned}\underline{\hat{x}}(k+Hu+1\,|\,k) &= \underline{A}^{Hu+1}\underline{x}(k) + \left(\underline{A}^{Hu} + \ldots + \underline{A} + \underline{I}\right)\underline{B}\underline{\Delta\hat{u}}(k\,|\,k) + \ldots \\ &\quad + \left(\underline{A}+\underline{I}\right)\underline{B}\underline{\Delta\hat{u}}(k+Hu-1\,|\,k) + \left(\underline{A}^{Hu} + \ldots + \underline{A} + \underline{I}\right)\underline{B}\underline{u}(k-1)\end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}\hat{\underline{x}}(k+Hp\mid k) = {} & \underline{A}^{Hp}\,\underline{x}(k) + \left(\underline{A}^{Hp-1} + \ldots + \underline{A} + \underline{I}\right)\underline{B}\underline{\Delta\hat{u}}(k\mid k) + \ldots \\ & + \left(\underline{A}^{Hp-Hu} + \ldots + \underline{A} + \underline{I}\right)\underline{B}\underline{\Delta\hat{u}}(k+Hu-1\mid k) \\ & + \left(\underline{A}^{Hp-1} + \ldots + \underline{A} + \underline{I}\right)\underline{B}\underline{u}(k-1)\end{aligned} \qquad (2.15)$$

Akhirnya, persamaan (2.11) – (2.15) dapat disusun ke dalam bentuk vektor matriks sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} \hat{\underline{x}}(k+1|k) \\ \vdots \\ \hat{\underline{x}}(k+Hu|k) \\ \hat{\underline{x}}(k+Hu+1|k) \\ \vdots \\ \hat{\underline{x}}(k+Hu|k) \end{bmatrix} = \underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{A} \\ \vdots \\ \underline{A}^{Hu} \\ \underline{A}^{Hu+1} \\ \vdots \\ \underline{A}^{Hp} \end{bmatrix}}_{\Psi} \underline{x}(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{B} \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{Hu-1} \underline{A}^{i}\underline{B} \\ \sum_{i=0}^{Hu} \underline{A}^{i}\underline{B} \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{Hp-1} \underline{A}^{i}\underline{B} \end{bmatrix}}_{\Gamma} \underline{u}(k-1)}_{lampau}$$

$$+ \underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{B} & \cdots & \underline{0}_{nxl} \\ \underline{A}\underline{B}+\underline{B} & \cdots & \underline{0}_{nxl} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{Hu-1} \underline{A}^{i}\underline{B} & \cdots & \underline{B} \\ \sum_{i=0}^{Hu} \underline{A}^{i}\underline{B} & \cdots & \underline{A}\underline{B}+\underline{B} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{Hp-1} \underline{A}^{i}\underline{B} & \cdots & \sum_{i=0}^{Hp-Hu} \underline{A}^{i}\underline{B} \end{bmatrix}}_{\Theta} \begin{bmatrix} \underline{\Delta\hat{u}}(k) \\ \vdots \\ \underline{\Delta\hat{u}}(k+Hu-1) \end{bmatrix}}_{\mathrm{Pr}\,ediksi} \qquad (2.16)$$

Selain itu, persamaan prediksi keluaran $\hat{\underline{y}}(k+i\mid k)$ dapat ditulis seperti berikut ini

$$\hat{\underline{y}}(k+1\mid k) = \underline{C}\,\hat{\underline{x}}(k+1\mid k) \qquad (2.17)$$

$$\hat{\underline{y}}(k+2\mid k) = \underline{C}\,\hat{\underline{x}}(k+2\mid k) \qquad (2.18)$$

$$\vdots$$

$$\underline{\hat{y}}(k+Hp \mid k) = \underline{C}\,\underline{\hat{x}}(k+Hp \mid k) \tag{2.19}$$

Persamaan (2.17) – (2.19) kemudian dapat ditulis kedalam vektor matriks sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} \underline{\hat{y}}(k+1 \mid k) \\ \vdots \\ \underline{\hat{y}}(k+Hp \mid k) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{C} & \underline{0}_{mxn} & \cdots & \underline{0}_{mxn} \\ \underline{0}_{mxn} & \underline{C} & \cdots & \underline{0}_{mxn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{0}_{mxn} & \underline{0}_{mxn} & \cdots & \underline{C} \end{bmatrix}}_{\underline{C}_y} \begin{bmatrix} \underline{\hat{x}}(k+1 \mid k) \\ \vdots \\ \underline{\hat{x}}(k+Hp \mid k) \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

2.5. Strategi Pengendali *Model Predictive Control* tanpa *Constraints*

Fungsi kriteria yang akan diminimumkan sama seperti pada persamaan (2.1) dan dapat ditulis sebagai berikut

$$V(k) = \left\| \underline{Y}(k) - \underline{T}(k) \right\|_{\underline{Q}}^2 + \left\| \underline{\Delta U}(k) \right\|_{\underline{R}}^2 \tag{2.21}$$

dengan

$$\underline{Y}(k) = \begin{bmatrix} \underline{\hat{y}}(k+1 \mid k) \\ \vdots \\ \underline{\hat{y}}(k+Hp \mid k) \end{bmatrix}, \; \underline{T}(k) = \begin{bmatrix} \underline{r}(k+1 \mid k) \\ \vdots \\ \underline{r}(k+Hp \mid k) \end{bmatrix},$$

$$\underline{\Delta U}(k) = \begin{bmatrix} \underline{\hat{u}}(k \mid k) \\ \vdots \\ \underline{\hat{u}}(k+Hu-1 \mid k) \end{bmatrix}$$

dan matriks faktor bobot $\underline{Q}$ dan $\underline{R}$ adalah sebagai berikut

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} Q(1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & Q(Hp) \end{bmatrix} \tag{2.22}$$

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} R(0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & R(Hu-1) \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

Berdasarkan pada persamaan ruang keadaan (2.16) dan (2.20), maka matriks $\underline{Y}(k)$ dapat ditulis dalam bentuk

$$\underline{Y}(k) = \underline{C}_Y \underline{\Psi}\, \underline{x}(k) + \underline{C}_Y \underline{\Gamma}\, \underline{u}(k-1) + \underline{C}_Y \underline{\Theta} \underline{\Delta U}(k) \tag{2.24}$$

Selain matriks-matriks di atas, didefinisikan juga suatu matriks penjejakan kesalahan $\underline{\mathrm{E}}(k)$, yaitu selisih antara nilai trayektori acuan yang akan datang dengan tanggapan bebas dari sistem. Tanggapan bebas adalah tanggapan yang akan terjadi pada rentang *prediction horizon* jika tidak ada perubahan nilai masukan ($\Delta\underline{U}(k)$ = $\underline{0}$). Persamaan matematis dari matriks $\underline{\mathrm{E}}$ (k) adalah sebagai berikut

$$\underline{\mathcal{E}}(k) = \underline{T}(k) - \underline{C}_Y \underline{\Psi}\, \underline{x}(k) - \underline{C}_Y \underline{\Gamma}\, \underline{u}(k-1) \tag{2.25}$$

Persamaan (2.21) kemudian dapat ditulis kembali dalam bentuk yang mengandung matriks $\underline{\mathrm{E}}(k)$ dan $\Delta\underline{U}(k)$ sebagai berikut

$$V(k) = \left\| \underline{C}_y \underline{\Theta} \underline{\Delta U}(k) - \underline{\mathcal{E}}(k) \right\|_{\underline{Q}}^2 + \left\| \underline{\Delta U}(k) \right\|_{\underline{R}}^2 \tag{2.26}$$

$$= \left[\underline{\Delta U}^T(k) \underline{\Theta}^T \underline{C}_y^T - \underline{\mathcal{E}}^T(k) \right] \underline{Q} \left[\underline{C}_y \underline{\Theta} \underline{\Delta U}(k) - \underline{\mathcal{E}}(k) \right] + \underline{\Delta U}^T(k) \underline{R} \underline{\Delta U}(k) \tag{2.27}$$

$$= \underbrace{\underline{\mathcal{E}}^T(k) \underline{Q} \underline{\mathcal{E}}(k)}_{\underline{c}_1} - \underline{\Delta U}^T(k) \underbrace{2\underline{\Theta}^T \underline{C}_y^T \underline{Q} \underline{\mathcal{E}}(k)}_{\underline{\mathcal{G}}} + \underline{\Delta U}^T(k) \underbrace{\left[\underline{\Theta}^T \underline{C}_y^T \underline{Q} \underline{C}_y \underline{\Theta} + \underline{R} \right]}_{\underline{\mathcal{H}}} \underline{\Delta U}(k) \tag{2.28}$$

Pada persamaan (2.28), bagian $\underline{\mathcal{E}}^T(k) \underline{Q} \underline{\mathcal{E}}(k)$ tidak mengandung unsur $\Delta\underline{U}(k)$ sehingga bagian tersebut bisa dianggap konstan sehingga bagian tersebut tidak diikutsertakan dalam proses optimasi untuk menghitung nilai $\Delta\underline{U}(k)$. Persamaan (2.28) kemudian dapat ditulis kembali menjadi

$$V(k) = \underline{c}_1 - \underline{\Delta U}^T(k) \underline{\mathcal{G}} + \underline{\Delta U}^T(k) \underline{\mathcal{H}}\, \underline{\Delta U}(k) \tag{2.29}$$

dengan

$$\underline{\mathcal{G}} = 2\underline{\Theta}^T \underline{C}_y^T \underline{Q} \underline{\mathcal{E}}(k) \tag{2.30}$$

dan

$$\underline{\mathcal{H}} = \underline{\Theta}^T \underline{C}_y^T \underline{Q}\underline{C}_y \underline{\Theta} + \underline{R} \tag{2.31}$$

Nilai optimal $\underline{\Delta U}(k)$ dapat dihitung dengan membuat gradien dari $V(k)$ bernilai nol. Gradien $V(k)$ dari persamaan (2.29) adalah

$$\nabla_{\underline{\Delta U}(k)} \underline{V}(k) = -\underline{\mathcal{G}} + 2\underline{\mathcal{H}}\,\underline{\Delta U}(k) \tag{2.32}$$

Dengan membuat nol nilai $\nabla_{\underline{\Delta U}(k)} \underline{V}(k)$ pada persamaan (2.32), maka didapatkan nilai optimal dari perubahan sinyal kendali sebagai berikut

$$\underline{\Delta U}(k)_{opt} = \frac{1}{2} \underline{\mathcal{H}}^{-1} \underline{\mathcal{G}} \tag{2.33}$$

Setelah nilai matriks $\underline{\Delta U}(k)$ didapatkan, maka nilai yang digunakan untuk mengubah sinyal kendali hanya nilai dari baris pertama matriks $\underline{\Delta U}(k)$ sedangkan nilai dari baris yang lain dari matriks $\underline{\Delta U}(k)$ dibuang.