

## **BAB II**

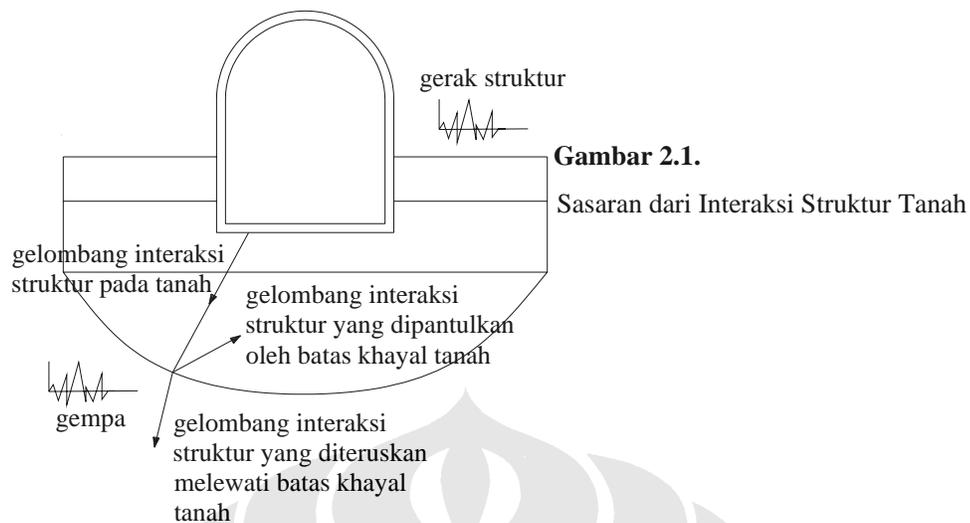
### **MODELISASI TANAH**

#### **2.1. KONSEP DASAR INTERAKSI STRUKTUR TANAH**

##### **2.1.1. Sasaran dari Interaksi Struktur Tanah [ 8 ]**

Dalam banyak kasus dinamik, tanah juga mengalami pembebanan dinamik yang mengakibatkan deformasi, yang tentunya dalam pemodelan harus diperhitungkan karena mempengaruhi kekakuan struktur. Oleh karena itu, untuk beberapa jenis bangunan tertentu interaksi struktur tanah harus diperhitungkan untuk memberikan hasil yang akurat.

Dalam kasus dinamik tanah dimodelkan sebagai *semi-infinite medium* dengan domain yang tidak terbatas. Berbeda dengan kasus statis dimana perkiraan batasan tanah yang masih dipengaruhi oleh pembebanan pada struktur dapat digambarkan, sehingga tanah dapat dimodelkan sama seperti struktur, maka cara yang sama tidak dapat diterapkan. Batasan khayalan tanah pada kasus dinamik akan memantulkan kembali gelombang dari struktur yang bergetar kepada tanah atau bisa juga meneruskan gelombang dari struktur ke suatu medium yang tidak terbatas. Oleh karena itu perlu untuk memodelkan tanah sebagai medium yang semi tidak terbatas secara tepat untuk membedakan antara dinamika tanah dengan dinamika struktur.



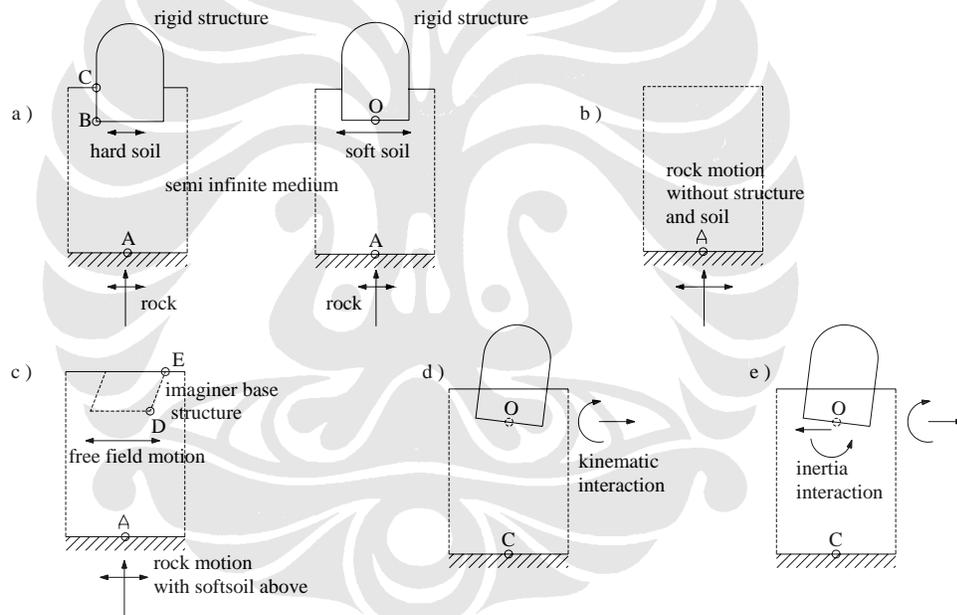
**Gambar 2.1.**  
Sasaran dari Interaksi Struktur Tanah

Untuk beban gempa, analisa interaksi struktur tanah terdiri dari dua bagian, yaitu pertama respon dari tanah bebas (*free field*) dan kedua adalah menghitung gerak seismik yang termodifikasi akibat adanya struktur (interaksi aktualnya struktur tanah). Untuk kedua hal di atas, ada dua hal yang berkaitan dengan tanah yang perlu kita ketahui. Yang pertama adalah suatu titik acuan gerak seismik (*control point*), dimana gerak seismiknya pernah tercatat sebelumnya, menjadi acuan bagi tempat lain yang memiliki karakter tanah atau geologi yang sama. Control point sendiri adalah suatu titik di lapisan batuan yang mengalami pergerakan seismik, yang pernah diketahui oleh karena pernah terjadi gempa sebelumnya di tempat itu. Gerak dari control point ini akan merambat ke tanah bebas (permukaan tanah lunak di atasnya) dalam bentuk gelombang energi (*wave propagation*) yang tercatat oleh seismogram dalam bentuk seismograf. Yang kedua adalah gerak seismik yang termodifikasi yang dipengaruhi galian tanah di sekitar bangunan yang menyebabkan sistem interaksi struktur tanah menjadi berubah, mengingat interaksi struktur tanah terjadi pada bagian struktur yang bersentuhan dengan tanah.

### 2.1.2. Efek Interaksi Struktur Tanah [ 8 ]

Untuk mengetahui efek dari interaksi struktur tanah, dipilih dua buah struktur pejal dengan besemen yang identik namun berdiri di atas dua jenis tanah

yang berbeda, yang pertama berdiri langsung di tanah keras ( batuan ), dan yang kedua berdiri di atas tanah yang relatif lebih lunak yang berada di atas batuan. Untuk struktur yang berada langsung di atas batuan, gerak horisontal dari tanah dapat langsung diterapkan pada bagian bangunan yang berinteraksi langsung dengan tanah. Input percepatan akibat gaya inersia horisontal akan konstan sepanjang tinggi struktur. Kemudian struktur akan memberikan respon berupa gaya geser dan momen guling. Akan tetapi karena batuan sangat keras, maka kedua respon struktur tadi tidak mengakibatkan deformasi pada batuan. Tidak ada perbedaan antara gerak pada control point ( titik A ) dengan gerak pada dasar bangunan ( titik B ), sehingga respon seismik dari struktur benar-benar hanya dipengaruhi oleh properti dari struktur.

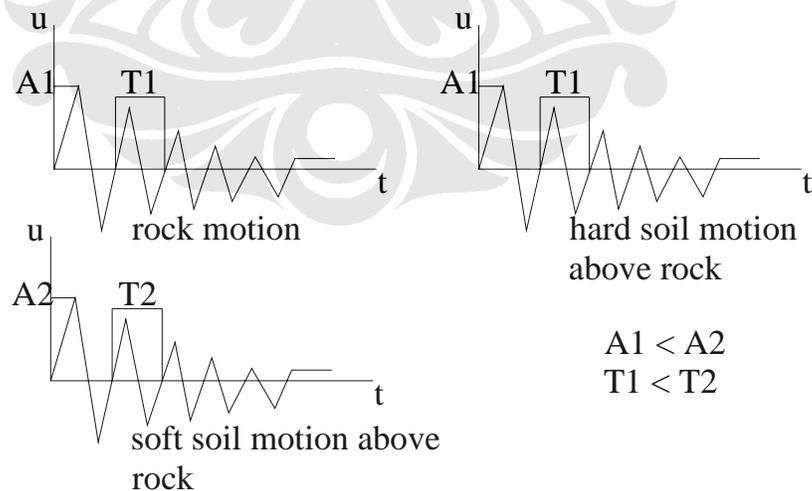


**Gambar 2.2.** Proses interaksi struktur tanah : a) dua struktur identik berada di atas lapisan tanah berbeda; b) gerak batuan tanpa struktur dan tanah di atasnya; c) gerak tanah bebas ( free field ); d) interaksi kinematik; e) interaksi inersia

Untuk struktur yang berdiri di atas tanah lunak, gerak dari suatu titik O ( seperti terlihat pada gambar ) pada dasar struktur akan berbeda dari gerak control point ( titik A ) pada lapisan batuan. Untuk mengerti proses interaksinya, maka dibuat atau dipecah proses perambatan energinya terlebih dahulu menjadi 3 bagian. Pertama adalah efek pergerakan seismik batuan ( gambar b ) pada tanah

lunak di atasnya tanpa bangunan dan galian yang disebut dengan *free field response* ( gambar c ) . Kehadiran tanah lunak akan mengurangi amplitudo gerakan dari titik A. Titik D dan E ( *free field motion* ) yang merupakan titik dimana bangunan akan didirikan akan mengalami perbedaan gerakan dengan batuan. Pada umumnya terjadi amplifikasi amplitudo gerakan pada titik D dan E. Kedua adalah dengan memasukkan bangunan ke dalam model, maka akan memodifikasi gerakan pada *free field*. Bangunan akan mengalami pergerakan horisontal, yang menghasilkan percepatan yang bervariasi sepanjang tinggi struktur. Pergerakan bangunan ini merupakan bagian dari analisa interaksi kinematik ( gambar d ). Yang ketiga adalah respon yang diberikan struktur pada tanah akan menyebabkan deformasi pada tanah yang akan mempengaruhi kembali gerakan pada dasar struktur, disebut sebagai interaksi inersia ( gambar e ).

Ada beberapa efek utama jika kita menggunakan metode interaksi struktur tanah. Pertama adalah perubahan gerak dari input seismik, yang pada aplikasinya menimbulkan penambahan efek horisontal yang lebih besar pada struktur terbenam daripada di titik control gerak A. Hal ini yang menyebabkan struktur terbenam, pada kasus gempa yang sebenarnya, akan mengalami kerusakan yang sangat besar.



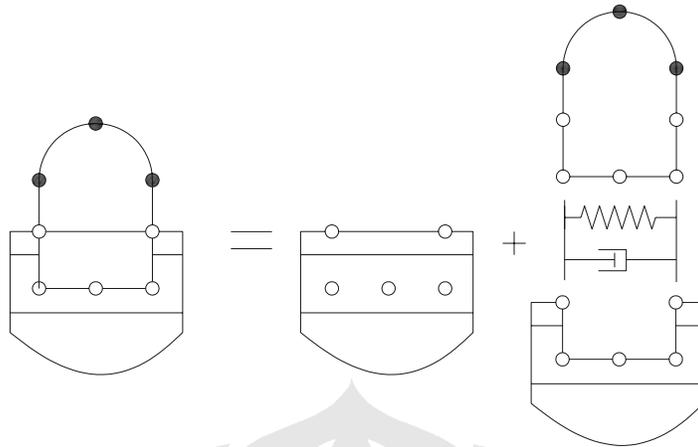
**Gambar 2.3.** Amplifikasi gerakan pada tanah lunak

Kedua, kehadiran tanah dalam model dengan elastisitasnya mengakibatkan struktur menjadi lebih fleksibel, dan akan menurunkan frekuensi gerak struktur jika dibandingkan dengan struktur yang diasumsikan terjepit di permukaan tanah. Ketiga, radiasi energi akibat respon struktur pada tanah memberikan manfaat sebagai faktor peredam untuk sistem dinamik akhirnya, yang akan menjadi faktor pengurang yang besar pada respon tanah terhadap struktur.

### **2.1.3. Substructure Method pada Interaksi Struktur Tanah**

Secara konseptual, cara yang paling sederhana untuk menganalisa interaksi struktur tanah untuk beban gempa adalah memodelkan secara keseluruhan struktur dan tanah menjadi satu kesatuan, kemudian memberikan gerak tanah bebas pada batas khayal yang telah dibuat, seperti pada gambar 1. Akan tetapi, cara ini, karena melibatkan banyak sekali derajat kebebasan dari tanah di sekitar struktur, maka akan memakan waktu yang sangat lama untuk komputer memprosesnya.

Sebagai solusi dari permasalahan di atas, maka muncul ide dengan menggunakan prinsip superposisi dari komponen struktur dan komponen tanah. Pertama-tama dicari terlebih dahulu persamaan gerak tanah bebas, secara khusus untuk nodal-nodal dimana nantinya akan berinteraksi dengan struktur terbenam. Bagian yang berinteraksi kemudian dimodelkan. Pertama tanah yang tak terbatas sebagai subsistem dinamik, hubungan antara *displacement* dan gaya dari nodal-nodal yang berinteraksi ditentukan, yang dalam bentuk fisiknya bisa berupa koefisien kekakuan dinamik tanah berupa konstanta pegas dan redaman. Kemudian meletakkan struktur pada koefisien kekakuan dinamik tanah yang dianalisa sebagai kasus pembebanan yang tergantung dari gerak tanah bebas. Karena prinsip superposisi mengijinkan kita untuk memecah sistem struktur tanah dengan bentuk yang rumit menjadi bagian-bagian yang sederhana, maka kita bisa memodelkan sistem tersebut dengan lebih sederhana tetapi dengan hasil yang lebih halus, karena model yang lebih detail bisa dikerjakan dengan cara yang lebih sederhana.

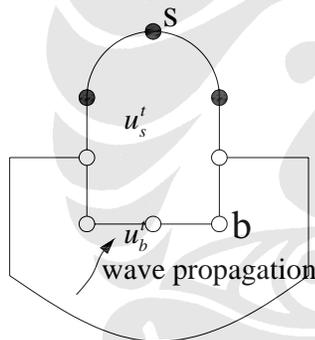


**Gambar 2.4.** Interaksi Struktur Tanah akibat Gempa dengan *Substructure Method*

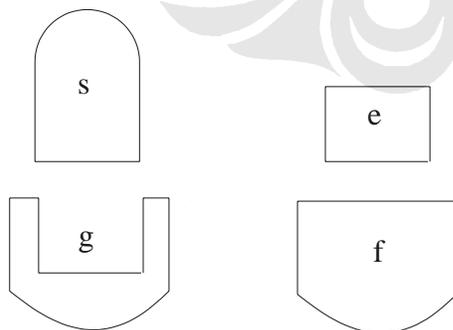
## 2.1.4. Persamaan Gerak Dasar, Interaksi Kinematik Inersia

### 2.1.4.1. Flexible Base

#### 2.1.4.1.1. Persamaan Gerak Dasar



**Gambar 2.5.** Sistem Interaksi struktur tanah



**Gambar 2.6.** Subsistem referensi

Pertama akan dibahas persamaan gerak untuk struktur terbenam yang relatif fleksibel. Kita asumsikan sebuah struktur terbenam dengan dinding

besemen. Kita gunakan subscript  $b$  untuk menandakan bagian dinding terbenam yang berinteraksi dengan tanah, dan subscript  $s$  untuk bagian struktur yang tidak berinteraksi dengan tanah ( gambar 2.4 ). Sistem dinamikanya terdiri dari dua substruktur ( gambar 2.5 ), struktur bangunan dan tanah dengan galian. Struktur diindikasikan dengan  $s$ , tanah dengan bagian yang ter gali dengan  $g$ , tanah tanpa galian dengan  $f$  dan galian tanah dengan  $e$ . Persamaan dinyatakan dalam domain frekuensi ( $\omega$ ), dan peralihan total dinyatakan sebagai  $\{u^t\}$  yang merupakan fungsi frekuensi. Vector  $\{u^t\}$  dapat diuraikan menjadi subvektor  $\{u_s^t\}$  dan  $\{u_b^t\}$ .

Matrik kekakuan dinamik dari struktur, yang terbatas, dapat dikalkulasi sebagai berikut

$$[S] = [K](1 + 2\zeta i) - \omega^2 [M] \dots\dots\dots ( 2.1 )$$

Dimana  $[K]$  dan  $[M]$  adalah matrik kekakuan statik dan massa. Konstanta redaman  $\zeta$ , yang bebas dari domain frekuensi, diasumsikan konstan di seluruh struktur. Matrik  $[S]$  dapat diuraikan menjadi submatrik  $[S_{ss}]$ ,  $[S_{sb}]$ , dan  $[S_{bb}^s]$ .

Sehingga persamaan gerak untuk struktur diformulasikan sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} [S_{ss}] & [S_{sb}] \\ [S_{bs}] & [S_{bb}^s] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_s^t\} \\ \{u_b^t\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{P_s\} \\ \{P_b\} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots ( 2.2 )$$

Dimana  $\{P_s\}$  dan  $\{P_b\}$  adalah amplitudo dari pembebanan dan gaya interaksi dengan tanah.

Matrik kekakuan dinamik untuk tanah  $[S_{bb}^g]$  tidak mudah untuk ditentukan mengingat tanah adalah domain yang tidak terbatas. Secara konsep,  $[S_{bb}^g]$  dapat ditentukan dengan mengeliminasi semua derajat kebebasan yang tidak berada pada permukaan tanah-struktur yang berinteraksi ( bersentuhan ). Vector dari  $[u_b^g]$  menandakan amplitudo peralihan untuk tanah dengan galian untuk eksitasi gempa. Sebagai referensi, maka sistem dari tanah bebas,  $[S_{bb}^f]$  dan  $[u_b^f]$  merupakan matrik kekakuan dinamik dan vector amplitudo peralihan. Matrik kekakuan untuk galian tanah adalah  $[S_{bb}^e]$ , merupakan domain terbatas,

mengikuti persamaan kekakuan yang sama dengan struktur dengan parameter tanah.

Untuk beban gempa, nodal yang tidak kontak dengan tanah ( misalnya nodal  $s$  ) tidak dibebani. Maka kita bisa tulis  $\{P_s\} = \{0\}$  sehingga

$$\begin{bmatrix} [S_{ss}] & [S_{sb}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_s^t\} \\ \{u_b^t\} \end{Bmatrix} = \{0\} \dots\dots\dots (2.3)$$

Kedua substruktur memberikan kontribusi pada persamaan dinamik di nodal  $b$ . kontribusi dari tanah akan kita diskusikan terlebih dahulu. Untuk amplitudo peralihan  $\{u_b^g\}$ , gaya interaksi yang bekerja pada nodal  $b$  adalah  $[S_{bb}^g](\{u_b^t\} - \{u_b^g\})$ , termasuk di dalamnya pengaruh dari  $\{P_b\}$ , sehingga persamaan gerak untuk nodal yang kontak dengan tanah adalah

$$[S_{bs}]\{u_s^t\} + [S_{bb}^s]\{u_b^t\} + [S_{bb}^g](\{u_b^t\} - \{u_b^g\}) = \{0\} \dots\dots\dots (2.4)$$

Maka persamaan gerak total untuk struktur dan tanah adalah

$$\begin{bmatrix} [S_{ss}] & [S_{sb}] \\ [S_{bs}] & [S_{bb}^s] + [S_{bb}^g] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_s^t\} \\ \{u_b^t\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0_s\} \\ [S_{bb}^g]\{u_b^g\} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (2.5)$$

Pada formulasi ini, eksitasi gempa disimbolkan oleh  $\{u_b^g\}$  yang merupakan nodal pada tanah dengan galian. Karena  $\{u_b^g\}$  sulit untuk ditentukan, maka ada ide untuk menggantikan  $\{u_b^g\}$  menjadi  $\{u_b^f\}$ , karena lebih mudah untuk ditentukan karena tidak tergantung pada galian di lokasi.

Sistem tanah bebas terjadi jika kita tambahkan bagian galian ke tanah dengan galian, sehingga matrik kekakuan dinamiknya

$$[S_{bb}^e] + [S_{bb}^g] = [S_{bb}^f] \dots\dots\dots (2.6)$$

Dengan menetapkan bahwa struktur terdiri atas tanah galian saja, maka persamaan di atas dapat diformulasikan untuk kasus khusus, dengan  $[S_{bs}] = [0]$ ,  $[S_{bb}^s] = [S_{bb}^e]$ , dan  $\{u_b^t\} = \{u_b^f\}$ , maka

$$([S_{bb}^e] + [S_{bb}^g])\{u_b^f\} = [S_{bb}^g]\{u_b^g\} \dots\dots\dots (2.7)$$

Dengan menyatukan antara persamaan ( 2.6 ) dan ( 2.7 ) maka kita dapatkan

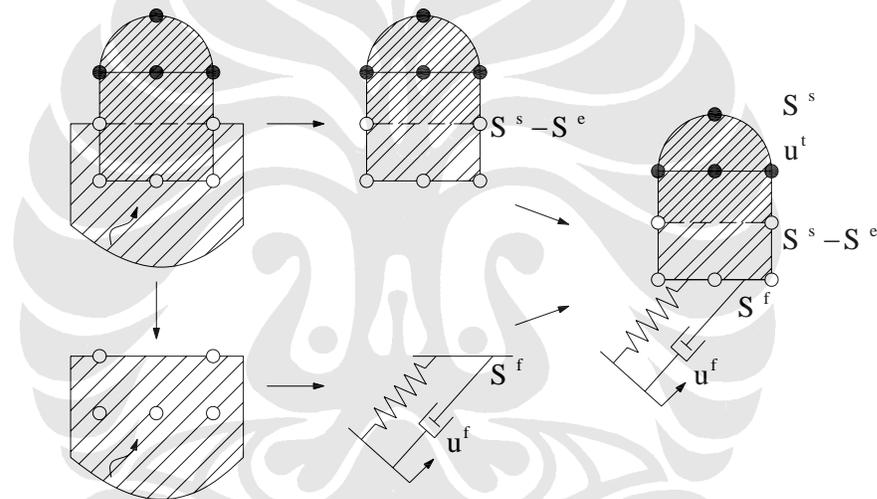


$$[S_{bb}^f]\{u_b^f\} = [S_{bb}^g]\{u_b^g\} \dots\dots\dots (2.8)$$

Kemudian dengan memasukkan persamaan ( 2.8 ) ke dalam persamaan ( 2.5 ) maka kita dapatkan persamaan gerak diskrit

$$\begin{bmatrix} [S_{ss}] & [S_{sb}] \\ [S_{bs}] & [S_{bb}^s] + [S_{bb}^g] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_s^t\} \\ \{u_b^t\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0_s\} \\ [S_{bb}^f]\{u_b^f\} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (2.9)$$

Persamaan di atas menyajikan formulasi peralihan total yang diekspresikan dengan matrik kekakuan dinamik tanah bebas  $[S_{bb}^f]$  dan gerak tanah bebas pada nodal yang sama  $\{u_b^f\}$ . Terjemahan fisiknya dapat dilihat seperti pada gambar berikut :



**Gambar 2.7.** Interpretasi fisik dari persamaan gerak dalam peralihan total

2.1.4.1.2. *Interaksi Kinematik dan Inersia*

Pada persamaan gerak total ( 9 ), beban gempa hanya dikenakan pada nodal yang berada di bagian struktur yang kontak dengan tanah. Akan tetapi para insinyur teknik sipil terbiasa bekerja dengan beban inersia gempa yang dikenakan pada setiap nodal pada struktur. Eksitasi ini tidak sama dengan gerak tanah bebas, tapi harus ditentukan utamanya untuk analisa dinamik. Analisanya terdiri atas 2 tahap, yaitu total peralihan dapat dibedakan menjadi peralihan akibat interaksi kinematik ( superscrip *k* ) dan interaksi inersia ( superscrip *i* ).

Maka secara matrik, persamaan geraknya dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \{u_s^t\} &= \{u_s^k\} + \{u_s^i\} \\ \{u_b^t\} &= \{u_b^k\} + \{u_b^i\} \end{aligned} \dots\dots\dots (2.10)$$

Pada bagian kinematik, massa dari struktur diset sama dengan 0, maka persamaan yang dihasilkan

$$\begin{bmatrix} (1+2\zeta i)[K_{ss}] & (1+2\zeta i)[K_{sb}] \\ (1+2\zeta i)[K_{bs}] & (1+2\zeta i)[K_{bb}^s] + [S_{bb}^g] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_s^k\} \\ \{u_b^k\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ [S_{bb}^g]\{u_b^g\} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (2.11)$$

$[S_{bb}^g]\{u_b^g\}$  bisa digantikan dengan  $[S_{bb}^f]\{u_b^f\}$ , sesuai pada persamaan gerak dasar.

Dengan persamaan yang telah diset, yang berkenaan dengan nodal  $s$ , maka matriknya

$$\{u_s^k\} = -[K_{ss}]^{-1}[K_{sb}]\{u_b^k\} = [T_{sb}]\{u_b^k\} \dots\dots\dots (2.12)$$

Matrik  $[T_{sb}]$  merepresentasikan transformasi kuasi statik, yang merupakan fungsi dari matrik kekakuan statik dari struktur. Tiap kolom dari matrik  $[T_{sb}]$  dapat divisualisasikan sebagai perpindahan statik dari nodal  $s$  struktur ketika unit peralihan dikenakan pada nodal  $b$  yang spesifik. Perpindahan lainnya di nodal  $b$  adalah nol, dan tidak ada beban dikenakan pada nodal  $s$ .

Dengan mensubstitusikan persamaan (2.12) ke persamaan (2.11), hasilnya

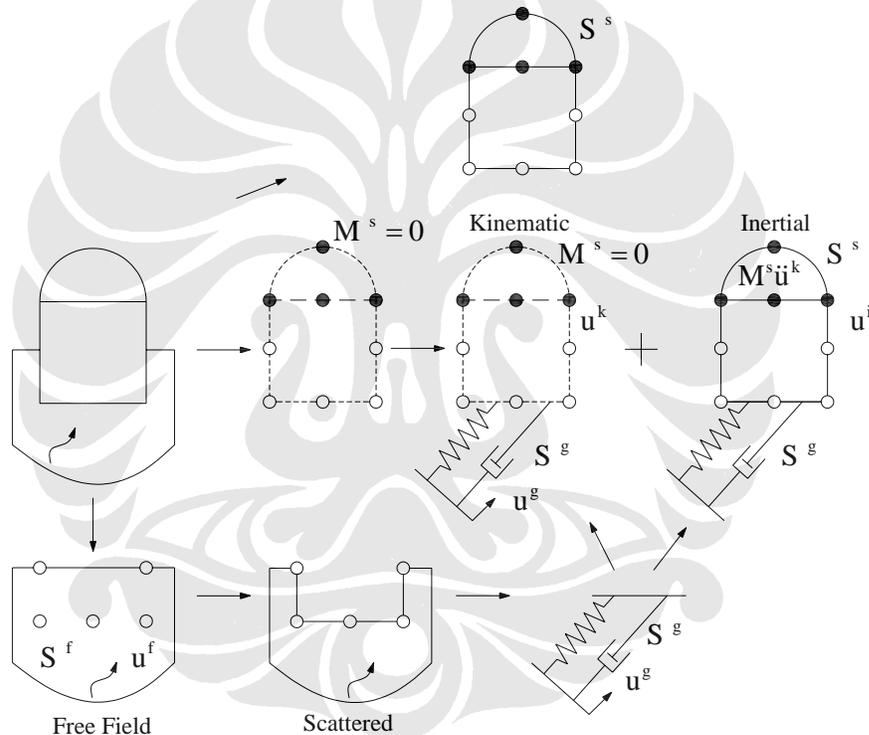
$$\begin{aligned} & \left( (1+2\zeta i) \left( [K_{bb}^s] - [K_{bs}][K_{ss}]^{-1}[K_{sb}] \right) + [S_{bb}^g] \right) \{u_b^k\} \\ & = [S_{bb}^g]\{u_b^g\} = [S_{bb}^f]\{u_b^f\} \end{aligned} \dots\dots\dots (2.13)$$

Untuk konfigurasi umum, amplitudo peralihan untuk interaksi kinematik pada nodal permukaan struktur tanah  $\{u_b^k\}$  berbeda dengan  $\{u_b^g\}$  dan  $\{u_b^f\}$ . Untuk gelombang gempa yang datang dalam arah horisontal dan vertikal, maka  $\{u_b^f\}$  terdiri atas amplitudo konstan ditandai dengan  $u^h$  dan  $u^v$ , seperti yang ditunjukkan pada gambar, kemudian kita kalikan dengan  $[K_{bb}^s] - [K_{bs}][K_{ss}]^{-1}[K_{sb}]$  menghasilkan resultan gaya nol, sebagaimana struktur bergerak seperti benda pejal. Untuk permukaan struktur yang dikenai gelombang dalam arah vertikal, maka  $\{u_b^k\}$  sama dengan  $\{u_b^f\}$ . Dalam kasus ini  $[T_{sb}]$  dapat ditentukan dari kinematik benda pejal ( translasi horisontal dan vertikal  $u^h$  dan  $u^v$  ). Dengan

memasukkan persamaan ( 2.10 ) ke persamaan ( 2.5 ) dan menggunakan persamaan ( 2.11 ), maka kita dapatkan persamaan gerak untuk interaksi inersia

$$\begin{bmatrix} [S_{ss}] & [S_{sb}] \\ [S_{bs}] & [S_{bb}^s] + [S_{bb}^g] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_s^i\} \\ \{u_b^i\} \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} [M_{ss}] & [M_{sb}] \\ [M_{bs}] & [M_{bb}^s] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_s^k\} \\ \{u_b^k\} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots( 2.14 )$$

Term  $\omega^2 \{u^k\}$  merepresentasikan amplitudo percepatan negatif untuk gerak kinematik. untuk bagian interaksi inersia dari respon dinamik, vektor beban terdiri atas beban inersia negatif yang ditentukan dari  $\{u^k\}$ .



**Gambar 2.8.** Interpretasi fisik dari interaksi kinematik dan inersia

2.1.4.2. Rigid Base

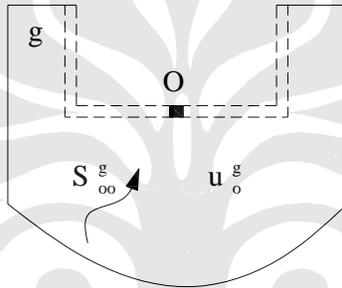
2.1.4.2.1. Persamaan Gerak Dasar

Pada kasus besemen pejal, gerak total di besemen  $\{u_b^i\}$  dapat diekspresikan dengan gerak total benda pejal di titik O  $\{u_o^i\}$  sebagai berikut

$$\{u'_b\} = [A]\{u'_o\} \dots\dots\dots(2.15)$$

Untuk besemen 3 dimensi, maka  $\{u'_o\}$  terdiri dari 3 peralihan dan 3 rotasi. Matrik  $[A]$  merepresentasikan transformasi kinematik dengan besaran geometris.

Pada besemen pejal, gerak dari permukaan struktur-tanah hanya tergantung pada  $\{u'_o\}$  sehingga terjadi reduksi derajat kebebasan jika dibandingkan dengan besemen fleksibel. Kemudian pada tanah dengan galian, batasan yang kompatibel dari besemen pejal diberikan, pada gambar berupa garis putus-putus, dan dianggap tidak bermassa.



**Gambar 2.9.** sistem tanah referensi dengan galian dan permukaan sentuh struktur tanah

Memperkenalkan transformasi variabel

$$\begin{Bmatrix} \{u'_s\} \\ \{u'_b\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [I] \\ [A] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u'_s\} \\ \{u'_o\} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(2.16)$$

Persamaan ( 2.9 ) mengalikannya dengan matrik transformasi didefinisikan oleh persamaan ( 2.16 ) menjadi

$$\begin{bmatrix} [S_{ss}] & [S_{so}] \\ [S_{os}] & [S_{oo}] + [S^g_{oo}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u'_s\} \\ \{u'_o\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ [A]^T [S^f_{bb}] \{u'_b\} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(2.17)$$

Dimana

$$\begin{aligned} [S_{so}] &= [S_{sb}][A] \\ [S^s_{oo}] &= [A]^T [S^s_{bb}][A] \dots\dots\dots(2.18) \\ [S^g_{oo}] &= [A]^T [S^g_{bb}][A] \end{aligned}$$

$[I]$  adalah matrik unit;  $[S_{oo}^s]$ ,  $[S_{so}]$ , dan  $[S_{os}] = [S_{so}]^T$  adalah submatrik kekakuan dinamik dari struktur dengan besemen pejal.  $[S_{oo}^g]$  merupakan matrik kekakuan dinamik dari tanah dengan galian pada permukaan struktur-tanah, yang dalam kasus dinamik menggambarkan amplitudo gaya dan peralihan, baik untuk translasi maupun rotasi. Persamaan ( 15 ) adalah ekspresi total dari persamaan gerak, dimana vektor bebannya  $[A]^T [S_{bb}^f] \{u_b^f\}$  tergantung pada gerak tanah bebas  $\{u_b^f\}$  dan terdiri dari 3 gaya dan tiga momen.

Untuk masuk lebih dalam pada signifikansi fisik dari vektor beban, maka perlu untuk menghitung gerak seismik dari sistem tanah dengan batasan untuk besemen pejal yang kompatibel. Gerak seismiknya, pada subsistem referensi seperti pada gambar ( 2.8 ) dinotasikan dengan  $\{u_o^g\}$  dan merepresentasikan arah gelombang yang menyebar. Batasan kompatibilitas dari besemen pejal diformulasikan sebagai berikut

$$\{u_b^g\} = [A] \{u_o^g\} \dots \dots \dots ( 2.19 )$$

Dengan mensubstitusikannya pada persamaan ( 2.8 ) dan mengalikan dengan  $[A]^T$ , dan dengan menggunakan persamaan ( 2.18 ) kita dapatkan

$$[S_{oo}^g] \{u_o^g\} = [A]^T [S_{bb}^f] \{u_b^f\} \dots \dots \dots ( 2.20 )$$

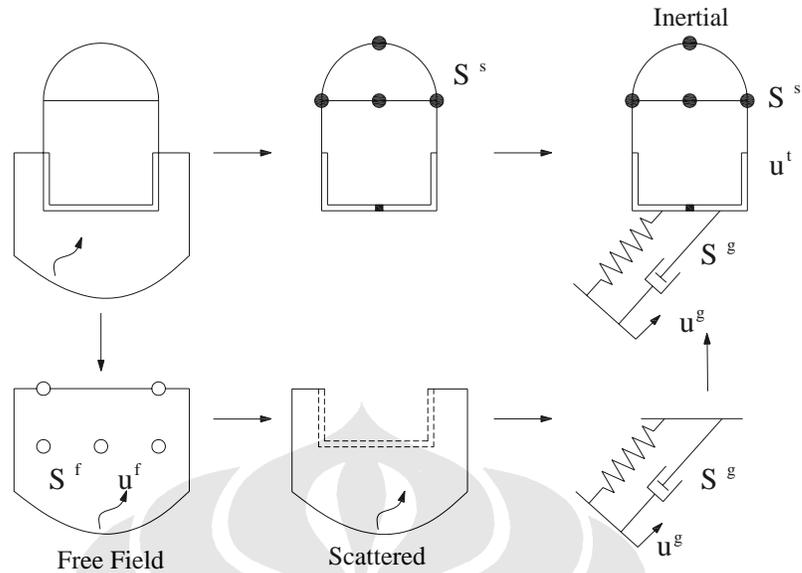
Atau

$$\{u_o^g\} = [S_{oo}^g]^{-1} [A]^T [S_{bb}^f] \{u_b^f\} \dots \dots \dots ( 2.21 )$$

Kemudian substitusikan persamaan ( 2.20 ) ke persamaan ( 2.17 ), kita dapatkan

$$\begin{bmatrix} [S_{ss}] & [S_{so}] \\ [S_{os}] & [S_{oo}^s] + [S_{oo}^g] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_s^t\} \\ \{u_o^t\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ [S_{oo}^g] \{u_o^g\} \end{Bmatrix} \dots \dots \dots ( 2.22 )$$

Secara visual persamaan di atas dapat diinterpretasikan sebagai berikut



**Gambar 2.10.** interpretasi fisik dari persamaan gerak dalam peralihan total

2.1.4.2.2. *Interaksi Kinematik dan Inersia*

Analog dengan besemen fleksibel, maka kita dapat formulasikan

$$\begin{aligned} \{u_s^t\} &= \{u_s^k\} + \{u_s^i\} \\ \{u_o^t\} &= \{u_o^k\} + \{u_o^i\} \end{aligned} \dots\dots\dots ( 2.23 )$$

Kemudian dengan menset massa struktur untuk interaksi kinematik sama dengan nol, kita dapatkan

$$\begin{bmatrix} (1+2\zeta i)[K_{ss}] & (1+2\zeta i)[K_{so}] \\ (1+2\zeta i)[K_{os}] & (1+2\zeta i)[K_{oo}^s] + [S_{oo}^g] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_s^k\} \\ \{u_o^k\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ [S_{oo}^g] \{u_o^g\} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots ( 2.24 )$$

Dengan memecahkan persamaan ini maka kita dapatkan

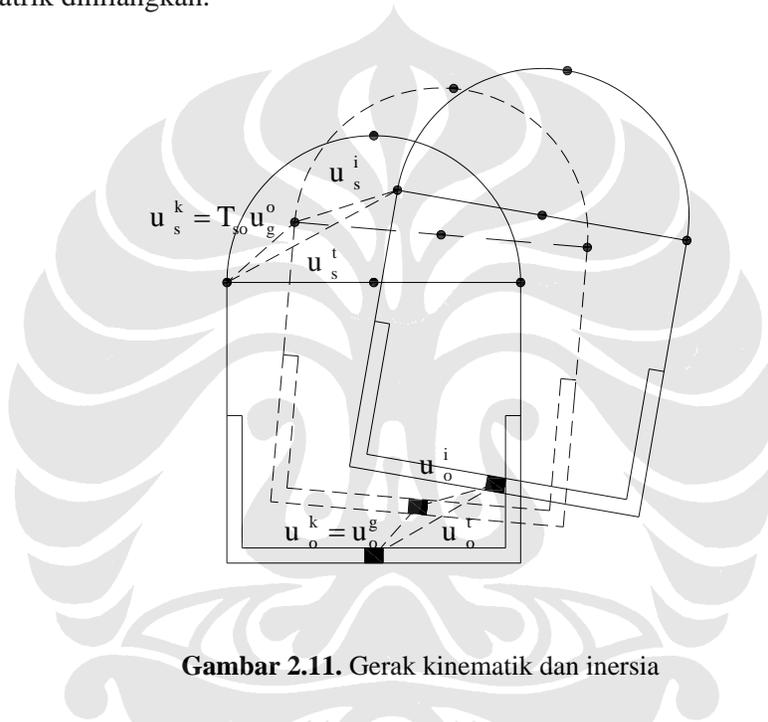
$$\begin{aligned} \{u_s^k\} &= [T_{so}] \{u_o^k\} \\ \{u_o^k\} &= \{u_o^g\} \end{aligned} \dots\dots\dots ( 2.25 )$$

dengan

$$[T_{so}] = -[K_{ss}]^{-1} [K_{so}] \dots\dots\dots ( 2.26 )$$

Matrik transformasi kuasi static  $[T_{so}]$  ditentukan dari persamaan keseimbangan dari bagian static dari nodal  $s$ . Matrik ini tidak dihitung secara langsung dengan

menggunakan persamaan ( 2.26 ), tetapi mengikuti secara langsung dari kinematika benda pejal, analog dengan matrik  $[A]$ . Matrik  $[T_{so}]$  tergantung pada besaran geometri dan tidak tergantung pada properti kekakuan dari struktur. Hal ini diilustrasikan melalui gambar ( 2.10 ), dimana bagian dalam dari besemen dihapuskan. Struktur yang tidak berdeformasi ditunjukkan dengan garis tipis, struktur yang pindah untuk interaksi kinematik dengan garis putus-putus, dan struktur yang berdeformasi keseluruhan sebagai garis tebal. Simbol untuk vektor dan matrik dihilangkan.



**Gambar 2.11.** Gerak kinematik dan inersia

Dalam menurunkan persamaan ( 2.25 ), kita menggunakan persamaan

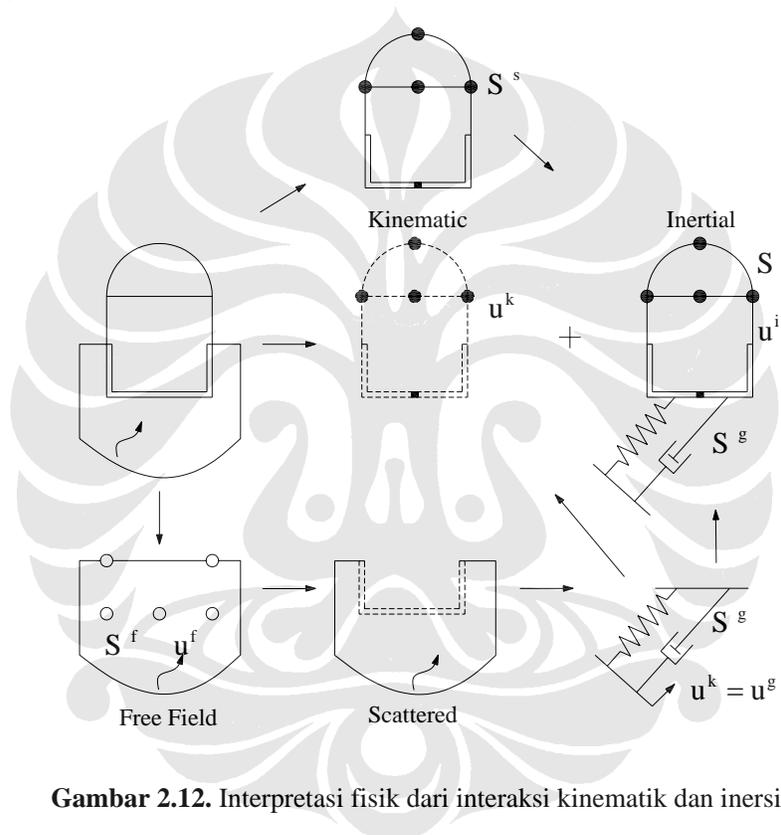
$$[K_{oo}^s] - [K_{os}] [K_{ss}]^{-1} [K_{so}] = [0] \dots\dots\dots ( 2.27 )$$

Yang mengekspresikan keseimbangan statik dari struktur.

Dengan melihat pada persamaan ( 2.25 ) bahwa gerak dari besemen yang pejal dalam interaksi kinematik sama dengan kinematika struktur pejal sepanjang besemen. Ini jelas bahwa kehadiran dari struktur tak bermassa tidak merubah respon dari besemen. Dengan mensubstitusikan persamaan ( 2.23 ) ke persamaan ( 2.24 ), dan dengan menggunakan persamaan ( 2.24 ), maka kita dapatkan interaksi inersianya

$$\begin{bmatrix} [S_{ss}] & [S_{so}] \\ [S_{os}] & [S_{oo}^s] + [S_{oo}^g] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_s^i\} \\ \{u_o^i\} \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} [M_{ss}] & [M_{so}] \\ [M_{os}] & [M_{oo}^s] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_s^k\} \\ \{u_o^k\} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (2.28)$$

Vektor beban sama dengan produk negatif dari massa struktur dan amplitudo percepatan gempa yang kemudian ditentukan dengan mengenakan amplitudo percepatan  $\{\ddot{u}_o^g\} (= -\omega^2 \{u_o^g\})$  pada titik O di besemen dan mengenakan kinematika benda pejal. Gerak kinematik dan inersia dapat diilustrasikan sebagai berikut:



Gambar 2.12. Interpretasi fisik dari interaksi kinematik dan inersia

### 2.1.5. Modifikasi Tanah dari Gerak Gempa Bumi [ 3 ]

Pada penjelasan sebelumnya dijelaskan bahwa salah satu input data yang penting adalah percepatan gempa dari batuan dasar atau percepatan gempa pada tanah bebas. Kedua percepatan ini berbeda besarnya tetapi saling terkait, dimana percepatan gempa pada tanah bebas merupakan hasil dari perambatan gelombang dari batuan dasar yang telah mengalami reduksi. Penggunaan dari kedua percepatan ini tergantung pada data gerak seismik berupa akselerogram yang mencerminkan percepatan tanah bebas, sehingga data dari akselerogram dapat



langsung dimasukkan sebagai input. Akan tetapi tidak di semua tempat memiliki catatan gempa. Metode yang digunakan sebagai solusi adalah dengan menentukan percepatan batuan dasar berdasarkan data akselerogram, dari atas ke bawah. Setelah mendapatkannya melalui perhitungan perambatan gelombang ( *wave propagation* ), maka dengan cara yang sama kita bisa menghitung pula percepatan tanah bebas dari bawah ke atas. Akan tetapi, akan lebih efisien jika memasukkan tanah dan struktur dalam suatu idealisasi tunggal dan memperhitungkan interaksi struktur tanah secara langsung.

Respon  $y(t)$  dari sistem yang bergetar linear terhadap eksitasi sembarang  $x(t)$  dapat diperoleh dari respon frekuensi kompleks sistem  $H(\bar{\omega})$  dengan menggunakan transformasi Fourier invers sebagai berikut

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\bar{\omega})X(\bar{\omega})\exp(i\bar{\omega}t) d\bar{\omega} \dots\dots\dots( 2.29 )$$

Dimana  $X(\bar{\omega})$  adalah transformasi Fourier fungsi pemaksa  $x(t)$  yaitu

$$X(\bar{\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\exp(-i\bar{\omega}t) dt \dots\dots\dots( 2.30 )$$

Dalam keadaan ini, fungsi pemaksa adalah percepatan batuan dasar yang akan diberi simbol  $\ddot{u}_b(t)$ , transformasi Fouriernya akan berbentuk

$$B(\bar{\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{u}_b(t)\exp(-i\bar{\omega}t) dt \dots\dots\dots( 2.31 )$$

Respon yang diinginkan adalah percepatan pada permukaan lapisan tanah  $\ddot{u}_g(t)$  dan respon frekuensi kompleks adalah fungsi transfer yang menyatakan amplitude gerak harmonik pada permukaan tanah yang disebabkan oleh masukan percepatan harmonik batuan dasar. Fungsi transfer ini akan diberi simbol  $Q(\bar{\omega})$ , dan dengan mengasumsikan bahwa sifat-sifat permukaan tanah sedemikian rupa sehingga tidak ada peredaman yang saling tergantung, fungsi ini dapat dengan mudah diperoleh melalui prosedur superposisi modus.

Jadi jika derajat kebebasan koordinat diskrit  $\mathbf{u}_c$  dari medium tanah dinyatakan dalam bentuk-bentuk modus getaran bebas  $\phi$  sebagai

$$\mathbf{u}_c = \Phi\mathbf{q} \dots\dots\dots( 2.32 )$$

persamaan gerak tanah yang diidealisasikan dapat ditransformasikan menjadi sekumpulan persamaan bebas yang masing-masing mempunyai bentuk

$$\ddot{Y}_n + 2\xi_n \omega_n \dot{Y}_n + \omega_n^2 Y_n = -\Gamma_n \ddot{u}_b \dots\dots\dots( 2.33 )$$

Dimana  $Y_n$  adalah amplitude respon mode  $n$ , masing-masing mode telah dinormalisasi untuk memberikan satu satuan massa tergeneralisasi  $M_n = \phi_n^T \mathbf{m} \phi_n = 1$ , dan faktor eksitasi gempa bumi mode diberikan oleh

$$\Gamma_n = \phi_n^T \mathbf{m} \mathbf{s} \dots\dots\dots( 2.34 )$$

Fungsi respon perpindahan kompleks untuk koordinat modus ini adalah  $-\Gamma_n H_n(\bar{\omega})$  dimana

$$H_n(\bar{\omega}) = \frac{1}{\omega_n^2} \frac{1}{1 - \beta_n^2 + 2i\xi_n \beta_n} \dots\dots\dots( 2.35 )$$

Karena itu fungsi respon percepatan kompleks adalah  $\Gamma_n H_n(\bar{\omega}) \bar{\omega}^2$ . Dengan demikian fungsi transfer mode yang menyatakan percepatan mode  $n$  pada permukaan yang disebabkan oleh satu satuan percepatan dasar adalah

$$Q_n(\bar{\omega}) = \phi_{gn} \Gamma_n H_n(\bar{\omega}) \bar{\omega}^2 \dots\dots\dots( 2.36 )$$

Dimana  $\phi_{gn}$  adalah perpindahan permukaan pada modus  $n$ . Kemudian fungsi perpindahan total diperoleh dengan mensuperposisikan fungsi perpindahan mode, yaitu

$$Q(\bar{\omega}) = \sum_{n=1}^N Q_n(\bar{\omega}) \dots\dots\dots( 2.37 )$$

percepatan permukaan relative

$$\ddot{u}_g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q(\bar{\omega}) B(\bar{\omega}) \exp(i\bar{\omega}t) d\bar{\omega} \dots\dots\dots( 2.38 )$$

Akan tetapi, gerak tanah bebas yang diinginkan adalah percepatan permukaan total, yang mencakup percepatan relative tambah kontribusi statik semu

$$\ddot{u}_g(t) = \ddot{u}_g(t) + r_g \ddot{u}_b(t) \dots\dots\dots( 2.39 )$$

dalam pernyataan ini  $r_g$  adalah perpindahan pada permukaan disebabkan oleh satu satuan perpindahan statik dari batuan dasar. Pernyataan terakhir untuk percepatan permukaan dengan demikian menjadi

$$\ddot{u}_g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [Q(\bar{\omega}) + r_g] B(\bar{\omega}) \exp(i\bar{\omega}t) d\bar{\omega} \dots\dots\dots( 2.40 )$$

Persamaan di atas menyatakan analisis gerak tanah bebas pada permukaan tanah disebabkan oleh suatu gerak batuan dasar tertentu  $\ddot{u}_b(t)$ . Dari sifat-sifat pasangan transformasi Fourier, fungsi-fungsi frekuensi dapat dituliskan dalam bentuk integral waktu

$$[Q(\bar{\omega}) + r_g] B(\bar{\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{u}_g(t) \exp(-i\bar{\omega}t) dt \equiv G(\bar{\omega}) \dots\dots\dots( 2.41 )$$

dimana transformasi Fourier dan riwayat percepatan permukaan diberi notasi  $G(\bar{\omega})$ . Bentuk akhir dari persamaan di atas adalah

$$B(\bar{\omega}) = [Q(\bar{\omega}) + r_g]^{-1} G(\bar{\omega}) \dots\dots\dots( 2.42 )$$

Akhirnya dengan mengambil transformasi invers dari  $B(\bar{\omega})$ , diperoleh

$$\ddot{u}_b(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [Q(\bar{\omega}) + r_g]^{-1} G(\bar{\omega}) \exp(i\bar{\omega}t) d\bar{\omega} \dots\dots\dots( 2.43 )$$

yang menyatakan gerak batuan dasar dalam bentuk transformasi Fourier gerak tanah bebas

## 2.2.PEMODELAN TANAH [ 1 ]

### 2.2.1. Modulus Geser ( G )

Modulus geser umumnya dipakai pada masalah getaran untuk memperkirakan amplitudo perpindahan dan frekuensi pondasi. Modulus geser didefinisikan sebagai perbandingan tegangan geser terhadap regangan geser. Modulus geser berhubungan dengan  $E$  dan  $\nu$  sebagai berikut :

$$G = \frac{s}{\varepsilon} = \frac{E_s}{2(1+\nu)} \dots\dots\dots( 2.44 )$$

Untuk penentuan modulus geser dinamis ada dua cara, yaitu penentuan  $G$  di laboratorium dan penentuan langsung di tempat. Penentuan modulus geser di laboratorium diperkirakan dengan pengujian resonan-kolom. Hal ini membutuhkan perlengkapan laboratorium khusus yang terdiri atas sel-sel triaksial yang dibuat khusus untuk menghasilkan getaran beramplitudo sangat kecil terhadap tanah percobaan. Nilai modulus geser dinamis bisa dikira-kira dengan

menggunakan persamaan empiris yang disajikan oleh Hardin dan Black ( 1968 ) untuk pasir berbutir bundar  $e < 0,8$  ,sebagai

$$G = \frac{6900(2,17 - e)^2}{1 + e} \sigma_o^{0,5} \text{ kPa} \dots\dots\dots( 2.45 )$$

Untuk bahan-bahan butiran sudut dengan  $e > 0,6$ , dan lempung dengan aktivitas sedang, maka perkiraan  $G$  adalah

$$G = \frac{3230(2,97 - e)^2}{1 + e} \sigma_o^{0,5} \text{ kPa} \dots\dots\dots( 2.46 )$$

Dimana  $\sigma_o = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{3}$ .

Cara yang kedua adalah penentuan modulus geser dinamis langsung di tempat. Pada massa tanah homogen dan elastis yang diberi tegangan dinamis pada satu titik dekat permukaan, akan terjadi tiga gelombang elastis yang merambat keluar dengan kecepatan yang berbeda-beda. Gelombang tersebut adalah gelombang kompresi ( P ), gelombang geser ( S ), dan gelombang permukaan ( atau Rayleigh ). Yang didapatkan dari pengujian lapangan ini adalah kecepatan kompresi dan kecepatan gelombang geser, yang berhubungan dengan konstanta elastis tanah menurut teori elastisitas tanah sebagai berikut :

$$\text{Kecepatan kompresi ( } V_c \text{ )} = \sqrt{\frac{E_s (1 - \nu)}{\rho(1 + \pi)(1 - 2\nu)}} \dots\dots\dots( 2.47 )$$

$$\text{Kecepatan gelombang geser ( } V_s \text{ )} = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \dots\dots\dots( 2.48 )$$

Dari kedua persamaan di atas,maka kita dapatkan persamaan di bawah ini

$$\left( \frac{V_s}{V_c} \right)^2 = \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} \dots\dots\dots( 2.49 )$$

yang dapat diinterpretasikan bahwa gelombang geser berkisar antara

$$0 \leq V_s \leq 0,707 V_c$$

Dari persamaan di atas dapat disimpulkan bahwa gelombang kompresi akan sampai lebih dahulu pada unit deteksi beberapa saat sebelum gelombang geser dan gelombang permukaan. Modulus geser bisa diperoleh dengan cara

mencari ukuran-ukuran di lapangan kecepatan gelombang geser  $V_s$  dengan memakai persamaan  $V_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ .

Kecepatan gelombang geser langsung di tempat bisa diperoleh dengan menggunakan metode-metode lubang silang dan lubang bawah. Pada metode lubang silang dua lubang bor terpisah dengan jarak yang diketahui dibor sampai pada kedalaman tertentu. Satu lubang diisi dengan alat pemicu, dan lubang yang lain dengan sensor penerima, maka kecepatannya dapat diukur dengan membagi jarak antar lubang dengan waktu rambat gelombang. Metode lubang bawah sama saja hanya dibutuhkan satu lubang saja untuk perhitungan, sehingga jarak antara transmitter dan resiper berbentuk diagonal.

Schmertmann ( 1978 ) menyarankan bahwa  $V_s$  mungkin bisa dihubungkan dengan nilai SPT  $N$  atau CPT  $q_o$ . Dari pengelompokan sejumlah besar nilai-nilai  $N$  pada pengujian tempat proyek dalam tanah, tampak bahwa  $V_s$  tempat proyek  $\cong 50N_{70}$ . Karena tidak adanya data-data yang lebih baik untuk pasir, seseorang bisa memakai  $V_s = 40$  hingga  $60 N_{70}$ .

Tabel berikut menunjukkan nilai-nilai representative modulus geser, khususnya untuk kasus dinamik :

**Tabel 2.1.** Modulus Geser Tanah Kasus Dinamik [ 1 ]

Bahan	$G$ ( MPa )
Pasir kuarsa padat bersih	12 – 20
Pasir halus seperti mika	16
Pasir berlin ( $e = 0,53$ )	17 – 24
Pasir tanah liat	10
Pasir kerikil padat	70
Lempung berlumpur lunak basah	9 – 15
Lempung berlumpur lunak kering	17 – 21
Lumpur berlumpur kering	25 – 35
Lempung sedang	12 – 30
Lempung berpasir	12 - 30

### 2.2.2. Rasio Poisson ( $\nu$ )

Rasio Poisson dipakai untuk mengkaji penurunan dan getaran. Hal itu ditentukan sebagai rasio kompresi poros terhadap regangan pemuai lateral sebagai

$$\nu = \frac{\epsilon_z}{\epsilon_x} \dots\dots\dots( 2.50 )$$

Pada kasus umum ada tiga nilai untuk tanah anisotropic yang mengambil ketiga arah koordinat, sehingga memiliki 3 nilai  $\nu$ . Pada kebanyakan tanah, kondisi isotropic itu diasumsikan sehingga hanya ada satu nilai  $\nu$ .

Bukti eksperimental menunjukkan bahwa  $\nu$  mungkin lebih besar dari 0,5 ( yang menunjukkan pemuai volume yang besar, atau terdapat regangan lateral yang besar ), yang menunjukkan keadaan tanah yang plastis dimana teori plastisitas tak adapt diterapkan lagi. Tetapi telah dicatat bahwa tanah itu bersifat elastis semu pada hampir seluruh rentang tegangan untuk hampir semua terapan perekayasaan, akan tetapi tetap digunakan sebagai kemudahan dalam analisa perhitungan dengan teori elastisitas.

Jangkauan nilai  $\nu$  yang khas untuk beberapa tanah diberikan pada tabel sebagai berikut.

**Tabel 2.2.** Rasio Poisson Beberapa Jenis Tanah [ 1 ]

Jenis Tanah	$\nu$
Lempung jenuh	0,4 – 0,5
Lempung tak jenuh	0,1 – 0,3
Lempung berpasir	0,2 – 0,3
Lanau	0,3 – 0,35
Pasir berkerikil	0,1 – 1
Batuan ( rock )	0,1 – 0,4

Dapat diperhatikan bahwa nilai untuk tanah sangat tak menentu, yang bisa dilakukan adalah membuat range, karena penentuan secara langsung nilai  $\nu$  teramat sukar. Dalam kasus dinamik, penentuan nilai  $\nu$  terdapat hanya pada range 0,333 dan 0,5. Kedua nilai ini sudah cukup memadai untuk semua masalah karena

hal tersebut masih merupakan perkiraan. Beberapa ahli geoteknik memilih angka 0,4 mengingat pada kasus dinamik strain vertical yang terjadi sangat kecil.

### 2.2.3. Modulus Tegangan Regangan ( $E$ )

Secara definisi, Modulus tegangan regangan adalah perbandingan antara perubahan tegangan terhadap perubahan regangan. Beberapa metode tersedia untuk menentukan modulus tegangan regangan, antara lain di laboratorium dengan menggunakan metode percobaan kompresi tak terbatas dan kompresi triaksial, dan percobaan di lapangan dengan menggunakan SPT, CPT, alat ukur tekanan, atau percobaan beban pelat. Karena nilai laboratorium dari  $E$  tidak sangat baik dan mahal untuk mendapatkannya, maka uji penetrasi standar ( SPT ) dan uji penetrasi kerucut ( CPT ) telah banyak digunakan. Tabel berikut memberikan sejumlah persamaan yang memungkinkan untuk digunakan pada beberapa metode percobaan. Nilai yang digunakan harus didasarkan pada pengalaman setempat dengan persamaan tersebut, yang memberikan kecocokan yang terbaik untuk tempat tersebut.

**Tabel 2.3.** Nilai  $E$  berdasarkan SPT dan CPT [ 1 ]

Tanah	SPT ( kPa )	CPT ( kPa )
Pasir ( terkonsolidasi normal )	$E = 500(N + 15)$ $E = (15000 \text{ to } 22000) \ln N$ $E = (35000 \text{ to } 50000) \log N$	$E = 2 \text{ to } 4q_c$ $E = (1 + D_r^2) q_c$
Pasir ( jenuh )	$E = 250(N + 15)$	
Pasir ( terkonsolidasi lebih )	$E = 18000 + 750N$	$E = 6 \text{ to } 30q_c$
Pasir berkerikil dan kerikil	$E = 1200(N + 6)$ $E = 600(N + 6) \quad N \leq 15$ $E = 600(N + 6) + 2000 \quad N > 15$	
Pasir berlempung	$E = 320(N + 15)$	$E = 3 \text{ to } 6q_c$
Pasir berlanau	$E = 300(N + 6)$	$E = 1 \text{ to } 2q_c$
Lempung lunak	–	$E = 3 \text{ to } 8q_c$

Catatan : Nilai  $E$  dalam satuan  $kPa$ , dan nilai  $N$  harus diperkirakan sebagai  $N_{55}$

Jangkauan nilai modulus tegangan regangan statik untuk beberapa jenis tanah dapat dilihat sebagai berikut :

**Tabel 2.4.** Nilai E untuk beberapa jenis tanah [ 1 ]

Tanah	$E_s$ ( MPa )
Lempung	
Sangat lunak	2 – 15
Lunak	5 – 25
Sedang	15 – 50
Keras	50 – 100
Berpasir	25 - 250
Pasir	
Berlanau	5 – 20
Lepas	10 – 25
Padat	50 - 81
Pasir dan Kerikil Padat	
Lepas	50 – 150
Padat	100 - 200

## 2.3. SIFAT ELASTISITAS TANAH

### 2.3.1. Tanah Sebagai Elemen Pegas

Menentukan nilai komponen elastisitas tanah dalam kasus pembebanan seismik merupakan hal yang sangat sulit dilakukan. Parameter elastisitas tanah merupakan kunci dari pemodelan tanah yang akan kita buat. Nilai yang eksak sangat sulit dilakukan, yang mungkin adalah menaksir nilai dari parameter tanah yang ada, dan kemudian membuat sebuah pemodelan tanah yang secara logika mirip perilaku tanah, akan tetapi tetap saja *engineering judgment* memainkan peranan dalam penentuannya. Oleh karena itu berikut ditampilkan beberapa nilai konstanta pegas dan redaman dari 2 narasumber yang berbeda.



1. **Tabel 2.5.** N.M. Newmark dan E. Rosenblueth, *Fundamental of Earthquake Engineering* untuk Pondasi Silinder Pejal [3]

Derajat Kebebasan	Konstanta Pegas ( K )	Redaman ( C )
Vertikal	$\frac{4Gr}{1-\nu}$	$1,79\sqrt{K\rho r^3}$
Horisontal	$18,2Gr \frac{(1-\nu^2)}{(2-\nu)^2}$	$1,08\sqrt{K\rho r^3}$
Rocking	$2,7Gr^3$	$0,47\sqrt{K\rho r^5}$
Torsi	$5,3Gr^3$	$1,11\sqrt{K\rho r^5}$

Catatan:

- $r$  adalah jari-jari silinder. Untuk dasar selain silinder, kita konversikan berdasarkan persamaan luas.
- $G$  = modulus geser ,  $\rho$  = massa jenis tanah ,  $\nu$  = poisson ratio

2.

**Tabel 2.6.** Novak dan Beredugo ( 1972 ) untuk Pondasi Silinder Pejal Terbenam [8]

Derajat Kebebasan	Konstanta Pegas ( K )	Redaman ( C )
Vertikal	$Gr_0 \left( \bar{C}_1 + \frac{G_s D_f}{G r_0} \bar{S}_1 \right)$	$r_0^2 \sqrt{\rho G} \left( \bar{C}_2 + \bar{S}_2 \frac{D_f}{r_0} \sqrt{\frac{G_s \rho_s}{\rho G}} \right)$
Horisontal	$Gr_0 \left( \bar{C}_{x1} + \frac{G_s D_f}{G r_0} \bar{S}_{x1} \right)$	$r_0^2 \sqrt{\rho G} \left( \bar{C}_{x2} + \bar{S}_{x2} \frac{D_f}{r_0} \sqrt{\frac{G_s \rho_s}{\rho G}} \right)$
Rocking	$Gr_0^3 \left( \bar{C}_{\theta 1} + \frac{G_s D_f}{G r_0} \left( \bar{S}_{\theta 1} + \frac{D_f^2}{3r_0^2} \bar{S}_{x1} \right) \right)$	$r_0^4 \sqrt{\rho G} \left( \bar{C}_{\theta 2} + \frac{G_s D_f}{G r_0} \left( \bar{S}_{\theta 2} + \frac{D_f^2}{3r_0^2} \bar{S}_{x2} \right) \right)$

Torsi	$Gr_0^3 \left( \bar{C}_{\alpha 1} + \frac{G_s}{G} \frac{D_f}{r_0} \bar{S}_{\alpha 1} \right)$	$r_0^4 \sqrt{\rho G} \left( \bar{C}_{\alpha 2} + \bar{S}_{\alpha 2} \frac{G_s}{G} \frac{D_f}{r_0} \sqrt{\frac{G_s \rho_s}{\rho G}} \right)$
-------	---	---

Catatan:

- Untuk pondasi selain silinder pejal

vertikal  $r_0 = \sqrt{\frac{BL}{\pi}}$ , horisontal  $r_0 = \sqrt{\frac{BL}{\pi}}$ , rocking  $r_0 = \sqrt[4]{\frac{BL^3}{3\pi}}$ ,

torsi  $r_0 = \sqrt[4]{\frac{BL(B^2 + L^2)}{6\pi}}$ , dimana B dan L adalah dimensi lebar dan panjang

pondasi.

- Nilai dari konstanta di atas

Poisson Ratio ( $\nu$ )	$\bar{C}_1$	$\bar{C}_2$	$\bar{S}_1$	$\bar{S}_2$
0	3,9	3,5	2,7	6,7
0,25	5,2	5	2,7	6,7
0,5	7,5	6,8	2,7	6,7

Poisson Ratio ( $\nu$ )	Parameter	
0	$\bar{C}_{x1} = 4,3$	$\bar{C}_{x2} = 2,7$
0,5	$\bar{C}_{x1} = 5,1$	$\bar{C}_{x2} = 3,15$
0	$\bar{S}_{x1} = 3,6$	$\bar{S}_{x2} = 8,2$
0,25	$\bar{S}_{x1} = 4$	$\bar{S}_{x2} = 9,1$
0,4	$\bar{S}_{x1} = 4,1$	$\bar{S}_{x2} = 10,6$

Poisson Ratio ( $\nu$ )	Parameter	
0	$\bar{C}_{\theta 1} = 2,5$	$\bar{C}_{\theta 2} = 0,43$
$\neq 0$	$\bar{S}_{\theta 1} = 2,5$	$\bar{S}_{\theta 2} = 1,8$

Parameter	
$\bar{C}_{\alpha 1} = 4,3$	$\bar{C}_{\alpha 2} = 0,7$
$\bar{S}_{\alpha 1} = 12,4$	$\bar{S}_{\alpha 2} = 2$

### 2.3.2. Tanah sebagai Elemen Plane Strain [ 9 ]

#### 2.3.2.1. Hipotesa

Elemen plane strain digunakan untuk menganalisa tegangan pada suatu struktur dengan dimensi salah satu sumbunya dianggap tidak hingga, sehingga deformasi arah sumbu tersebut diabaikan karena sangat kecil sekali. Jika kita anggap sumbu tersebut adalah sumbu z, maka hipotesanya :

$$\begin{aligned} u &= u(x, y) \\ v &= v(x, y) \\ w &= 0 \\ \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} &= 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots ( 2.51 )$$

#### 2.3.2.2. Formulasi Elemen Hingga

$$\{\sigma\} = [H_\varepsilon] \{\varepsilon\} \quad \dots\dots\dots ( 2.52 )$$

Dimana :

$$[H_\varepsilon] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & 0 & 0 \\ 0 & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots ( 2.53 )$$

$$\{\varepsilon\} = [B_m] \{u_n\} \quad \dots\dots\dots ( 2.54 )$$

Dimana matriks  $[B_m]$  merupakan fungsi dari turunan pertama fungsi bentuk

$$[B_m] = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & N_{3,x} & 0 & N_{4,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & 0 & N_{3,y} & 0 & N_{4,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & N_{2,y} & N_{2,x} & N_{3,y} & N_{3,x} & N_{4,y} & N_{4,x} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots ( 2.55 )$$

Fungsi bentuknya :

$$\begin{aligned}
 N_1(x, y) &= \frac{1}{4ab}(a-x)(b-y) \\
 N_2(x, y) &= \frac{1}{4ab}(a+x)(b-y) \\
 N_3(x, y) &= \frac{1}{4ab}(a+x)(b+y) \\
 N_4(x, y) &= \frac{1}{4ab}(a-x)(b+y)
 \end{aligned} \dots\dots\dots( 2.56 )$$

Maka turunannya :

$$\begin{aligned}
 N_{1,x} &= \frac{1}{4ab}(-b+y) & N_{1,y} &= \frac{1}{4ab}(-a+x) \\
 N_{2,x} &= \frac{1}{4ab}(b-y) & N_{2,y} &= \frac{1}{4ab}(-a-x) \\
 N_{3,x} &= \frac{1}{4ab}(b+y) & N_{3,y} &= \frac{1}{4ab}(a+x) \\
 N_{4,x} &= \frac{1}{4ab}(-b-y) & N_{4,y} &= \frac{1}{4ab}(a-x)
 \end{aligned} \dots\dots\dots( 2.57 )$$

Sedangkan  $\{u_n\}$  kita dapatkan dari :

$$\{f\} = [k_m]\{u_n\} - \{f\}^{BNE} \dots\dots\dots( 2.58 )$$

Dimana

$$[k_m] = \int_{-a}^a \int_{-b}^b [B_m]^T [H_m][B_m] d_x d_y \dots\dots\dots( 2.59 )$$

$$[H_m] = h[H] \dots\dots\dots( 2.60 )$$

Nilai  $h$  untuk kasus *plane strain* = 1 .

### 2.3.3. Gempa sebagai Tekanan Tanah

Tekanan lateral pada dinding basement akibat gempa dihitung dengan menggunakan *Metode Seed and Whitman* sebagai berikut :

$$\text{Gaya lateral} = P_{ER} = \frac{P_E k_o}{k_A}, \text{ dimana } P_E = \frac{3}{8} \frac{a_{\max}}{g} H^2 \gamma_t$$

dimana :

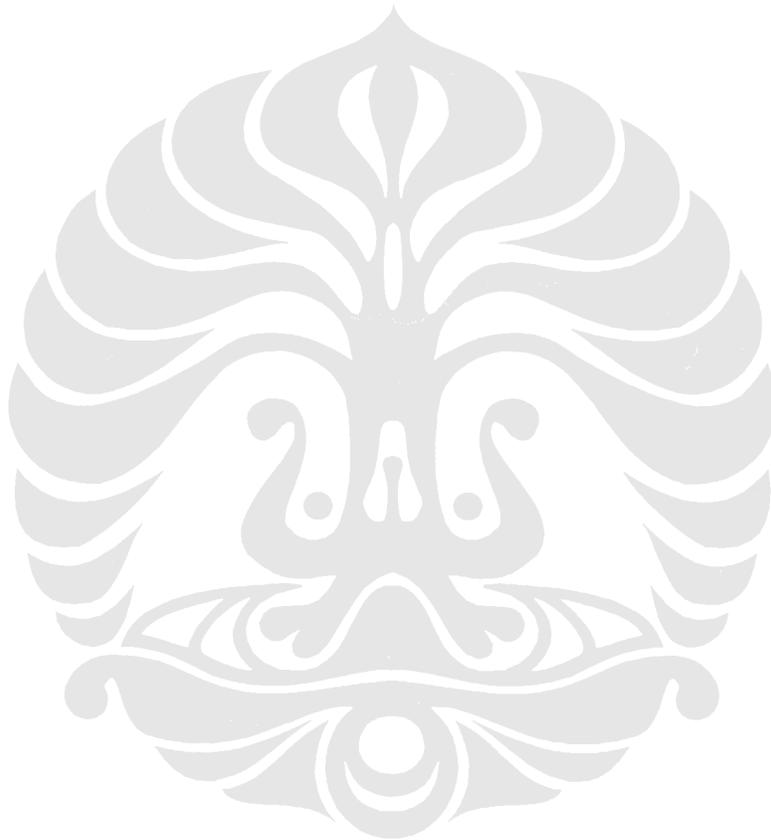
$H$  = kedalaman dinding basement

$a_{\max}$  = percepatan gempa =  $0,3g$  (untuk tanah lunak)

$k_o$  = koefisien tanah diam

$k_A$  = koefisien tanah aktif

dan posisi gaya lateral dari dasar dinding basement  $h_e = 0,6H$



## BAB III

### MODELISASI STRUKTUR

#### 3.1. MODELISASI STRUKTUR ATAS DENGAN ELEMEN HINGGA

Pemodelan dilakukan dengan pendekatan elemen hingga, karena jika menggunakan sistem yang kontinu yang tidak didiskritisasi akan sangat rumit sekali, melibatkan persamaan diferensial parsial untuk persamaan geraknya. Alasan lainnya karena nantinya penelitian akan dilakukan dengan software yang berbasis elemen hingga, sehingga perlu untuk diketahui formulasi strukturnya.

Secara umum, sebuah struktur memiliki 6 DOF (*Degree of Freedom*) untuk setiap nodal yaitu tiga peralihan dan tiga translasi yang berhubungan dengan deformasi aksial, geser, lentur, dan torsi. Keakuratan dari elemen hingga ditentukan oleh jumlah DOF yang dikalkulasi. Karena bangunan tinggi akan memiliki banyak sekali nodal dan DOF, maka dimungkinkan untuk mereduksi jumlah DOF tiap nodal untuk mengefisienkan perhitungan tetapi tetap menghasilkan analisa yang memuaskan. [6]

Teknik yang sederhana dalam mereduksi DOF adalah dengan *kinematic constraints*. Diasumsikan lantai sebagai *rigid diaphragm*, maka tiap nodal hanya ada tiga DOF yaitu translasi arah X dan Y, serta rotasi arah Z. Maka peralihan elemen struktur dapat ditransformasikan terhadap peralihan pada pusat massa setiap level lantai dengan persamaan : [6]

$$\begin{aligned}
 u_x &= u_x^m - \Delta y \theta_z^m \\
 u_y &= u_y^m - \Delta x \theta_z^m \dots\dots\dots (3.1) \\
 \theta_z &= \theta_z^m
 \end{aligned}$$

dimana :

$u_x, u_y, \theta_z$  adalah peralihan elemen struktur

$u_x^m, u_y^m, \theta_z^m$  adalah peralihan pusat massa setiap level lantai

$\Delta x, \Delta y$  adalah jarak nodal elemen terhadap pusat massa lantai

### 3.1.1. Pembentukan Matrik Kekakuan

Dengan pendekatan finite elemen, fungsi peralihan dapat didefinisikan sebagai berikut

$$\mathbf{u} = \langle \mathbf{N} \rangle \{ \mathbf{d} \} \dots \dots \dots (3.2)$$

Dimana

$$\langle \mathbf{N} \rangle = \langle N_{ux1} \ N_{uy1} \ N_{uz1} \ N_{\theta x1} \ N_{\theta y1} \ N_{\theta z1} \ N_{ux2} \ N_{uy2} \ N_{uz2} \ N_{\theta x2} \ N_{\theta y2} \ N_{\theta z2} \rangle$$

$$\{ \mathbf{d} \} = \langle u_{x1} \ u_{y1} \ u_{z1} \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ \theta_{z1} \ u_{x2} \ u_{y2} \ u_{z2} \ \theta_{x2} \ \theta_{y2} \ \theta_{z2} \rangle$$

Dan  $\langle \mathbf{N} \rangle$  merupakan fungsi bentuk yang dirumuskan sebagai berikut

$$N_{ux1} = 1 - \frac{x}{L} \qquad N_{ux2} = \frac{x}{L}$$

$$N_{uy1} = 1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3} \qquad N_{uy2} = 3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3}$$

$$N_{uz1} = 1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3} \qquad N_{uz2} = 3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3}$$

$$N_{\theta x1} = 1 - \frac{x}{L} \qquad N_{\theta x2} = \frac{x}{L}$$

$$N_{\theta y1} = x - 2\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \qquad N_{\theta y2} = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$

$$N_{\theta z1} = x - 2\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \qquad N_{\theta z2} = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$

Matrik kekakuan elemen dinyatakan oleh

$$[\mathbf{k}] = \int_{Vol} \langle \mathbf{B} \rangle [E] \{ \mathbf{B} \} dVol \dots \dots \dots (3.3)$$

Dimana  $[E]$  adalah matrik property material dan  $\{ \mathbf{B} \}$  adalah matrik *strain displacement matrix* yang merupakan turunan pertama dari fungsi bentuk.

### 3.1.2. Pembentukan Matrik Massa

Matriks massa elemen dapat dinyatakan oleh:

$$[\mathbf{m}] = \int_{Vol} \langle \mathbf{N} \rangle \rho \{ \mathbf{N} \} dVol \dots \dots \dots (3.4)$$

Dimana matriks massa yang terbentuk disebut matriks massa konsisten karena fungsi bentuk  $\{N\}$  sama seperti fungsi bentuk yang dipakai untuk memformulasikan matriks kekakuan. Dari persamaan di atas, bentuk tunggal dari matriks massa adalah

$$m_{ij} = \rho A \int_{Vol} N_i N_j dx \dots\dots\dots(3.5)$$

Formulasi yang lebih sederhana adalah matriks massa tergumpal. Dengan cara ini gaya inersia dan derajat kebebasan rotasi diabaikan sehingga matriks mempunyai bentuk diagonal. Untuk matriks massa tergumpal,

$$m_{ij} = 0 \text{ jika } i \neq j$$

$$m_{ij} = 0 \text{ jika } j = \text{DOF rotasi}$$

### 3.1.3. Pembentukan Matrik Redaman

Ada dua metode menentukan redaman struktur [4], yaitu :

1. metode *phenomenological damping*, dimana mekanisme redaman aktual dimodelkan seperti gesekan sambungan struktur, sifat histeristik elastic-plastik material.
2. metode *spectral damping*, dimana redaman *viscous* didefinisikan dalam suatu rasio redaman yang ditentukan dengan perobaan. Metode spectral damping yang populer adalah rayleigh atau redaman proporsional dimana matriks massa redaman [C] merupakan kombinasi linear dari matriks kekakuan dan massa yang dirumuskan [2]:

$$[C] = a_0 [K] + a_1 [M] \dots\dots\dots(3.6)$$

Dimana  $a_0$  dan  $a_1$  adalah konstanta redaman proporsional terhadap kekakuan dan massa yang dapat dicari dengan persamaan

$$\xi = \frac{a_0}{2} \frac{1}{\omega_n} + \frac{a_1}{2} \omega_n \dots\dots\dots(3.7)$$

Konstanta  $a_0$  dan  $a_1$  dapat dihitung dengan mendefinisikan rasio redaman  $\xi_i$  dan  $\xi_j$  pada mode I dan j, dengan frekuensi alami  $\omega_i$  dan  $\omega_j$ . Mode I adalah mode pertama dari struktur dan mode j adalah mode yang memiliki frekuensi natural yang lebih tinggi dan memberikan kontribusi respon dinamik yang



siknifikan. Dengan mengasumsikan redaman sama untuk kedua mode, konstanta  $a_0$  dan  $a_1$  dapat dirumuskan oleh

$$a_0 = \xi \frac{2\omega_i\omega_j}{\omega_i + \omega_j} \qquad a_1 = \xi \frac{2}{\omega_i + \omega_j} \dots\dots\dots( 3.8 )$$

**3.2. FORMULASI PERSAMAAN GERAK STRUKTUR ATAS**

Dengan pendekatan elemen hingga, struktur kontinu diubah menjadi struktur diskrit dimana persamaan dinamik diturunkan dengan mendefinisikan perubahan energi potensial terhadap sebuah elemen. Dengan prinsip d’alembert persamaan kesetimbangan dirumuskan [5]:

$$\Delta E = \Delta W + \Delta I + \Delta D - \Delta L \dots\dots\dots( 3.9 )$$

dimana

$$\Delta W = \text{perubahan energi regangan} = \frac{1}{2} \int \{ \Delta \varepsilon \}^T \{ \Delta \sigma \} dVol$$

$$\{ \Delta \varepsilon \} = [B] \{ d \} \quad ; \quad [B] = \text{strain displacement matrik}$$

$$\{ \Delta \sigma \} = [E] \{ \Delta \varepsilon \} \quad ; \quad [E] = \text{matrik properti material}$$

$$\Delta I = \text{perubahan energi inersia} = \int \{ \Delta u \} \rho \{ \Delta \ddot{u} \} dVol \quad ;$$

$$\rho = \text{massa jenis material}$$

$$\Delta D = \text{perubahan energi redaman} = \int \{ \Delta u \} c \{ \Delta \dot{u} \} dVol \quad ;$$

$$c = \text{konstanta redaman material}$$

$$\Delta L = \int_{Vol} \{ \Delta d \}^T \{ \Delta F \} dVol + \int_{surface} \{ \Delta d \}^T \{ \Delta T \} dSurface$$

$$\{ \Delta d \} = \text{displacement}$$

$$\{ \Delta F \} = \text{body forces}$$

$$\{ \Delta T \} = \text{surface traction}$$

$$\Delta E = \text{perubahan energi potensial}$$

Dengan pendekatan metode elemen hingga, fungsi peralihan, kecepatan, dan percepatan daapt dinyatakan oleh

$$\{ u \} = [N] \{ u \}_{nodes}$$

$$\{ \dot{u} \} = [N] \{ \dot{u} \}_{nodes} \dots\dots\dots( 3.10 )$$

$$\{ \ddot{u} \} = [N] \{ \ddot{u} \}_{nodes}$$

Substitusi persamaan ( 3.10 ) ke dalam 4 persamaan energi di atas kemudian hasilnya disubstitusikan ke dalam persamaan ( 3.9 ) dan dengan prinsip kesetimbangan maka persamaan yang terbentuk akan sama dengan nol, sehingga

$$\begin{aligned} \delta\Delta E = & \sum_{i=1}^N \left( \{\delta\Delta u\}_n^T \right)_i \left[ \int_{Vol} [B]^T [E][B] dVol \{\Delta u\}_n \right. \\ & + \sum_{i=1}^N \left( \{\delta\Delta u\}_n^T \right)_i \left[ \int_{Vol} [N]^T \rho [N] dVol \{\Delta \ddot{u}\}_n \right] \\ & - \sum_{i=1}^N \left( \{\delta\Delta u\}_n^T \right)_i \left[ \int_{Vol} [N]^T \{\Delta F\} dVol + \int_{Surface} [N]^T \{\Delta T\} dSurface \right] = 0 \end{aligned} \quad \dots( 3.11 )$$

Persamaan di atas dapat disederhanakan menjadi

$$\sum_{i=1}^n [m]_i (\{\ddot{u}\}_n)_i + \sum_{i=1}^n [c]_i (\{\dot{u}\}_n)_i + \sum_{i=1}^n [k]_i (\{u\}_n)_i = \sum_{i=1}^n \{R_E\}_i \dots\dots\dots( 3.12 )$$

Dimana

- [m] = matriks massa elemen
- [c] = matriks redaman elemen
- [k] = matriks kekakuan elemen
- [ $\Delta R_E$ ] = gaya luar

Dengan mengevaluasi seluruh elemen struktur dan mengkombinasikan setiap matrik elemen, maka persamaan ( 3.12.) dapat disederhanakan menjadi

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{R_E\} \dots\dots\dots( 3.13 )$$

Dimana [M], [C], [K] adalah matrik massa, redaman dan kekakuan struktur.

Untuk beban gempa, gaya luar { $R_E$ } sama dengan nol. Dasar pergerakan gempa adalah tiga komponen peralihan tanah  $u(t)_{ig}$  yang terjadi pada level pondasi struktur. Persamaan peralihan, kecepatan, dan percepatan absolut dapat dinyatakan oleh :

$$\begin{aligned} u(t)_a &= u(t) + I_x u(t)_{xg} + I_y u(t)_{yg} + I_z u(t)_{zg} \\ \dot{u}(t)_a &= \dot{u}(t) + I_x \dot{u}(t)_{xg} + I_y \dot{u}(t)_{yg} + I_z \dot{u}(t)_{zg} \dots\dots\dots( 3.14 ) \\ \ddot{u}(t)_a &= \ddot{u}(t) + I_x \ddot{u}(t)_{xg} + I_y \ddot{u}(t)_{yg} + I_z \ddot{u}(t)_{zg} \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan ( 3.14 ) ke persamaan ( 3.13 ), persamaan kesetimbangan dinamik untuk beban gempa dapat dinyatakan oleh

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = -[M]_x \{\ddot{u}\}_{xg} - [M]_y \{\ddot{u}\}_{yg} - [M]_z \{\ddot{u}\}_{zg} \dots\dots\dots(3.15)$$

Dimana :

$$[M]_i = [M]\{I\}_i$$

$\{I\}_i$  = vektor dengan besar satu untuk i derajat kebebasan dan nol untuk arah yang lain

### 3.3. ANALISA BEBAN DINAMIK PADA STRUKTUR ATAS

#### 3.3.1. Properti Modal [ 2 ]

Persamaan getaran bebas, dimana gaya luar yang bekerja  $R_E = 0$ , dan struktur tidak teredam ( $C = 0$ ) adalah :

$$m\ddot{u} + ku = 0 \dots\dots\dots(3.16)$$

Untuk menyelesaikan persamaan di atas, diambil persamaan lendutan sebagai berikut:

$$u(t) = q_n(t)\phi_n \dots\dots\dots(3.17)$$

Dimana :

$q_n(t)$  = lendutan yang bervariasi terhadap waktu secara harmonik

$\phi_n(t)$  = vektor fungsi bentuk yang tidak bervariasi terhadap waktu

Bentuk persamaan dari  $q_n(t)$  merupakan fungsi lendutan harmonik sederhana, yaitu:

$$q_n(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t \dots\dots\dots(3.18)$$

Dimana  $A_n$  dan  $B_n$  adalah konstanta integrasi yang dapat dihitung berdasarkan kondisi awal. Dengan mengkombinasikan persamaan ( 3.17 ) dan ( 3.18 ), kemudian dengan mensubstitusikan ke dalam persamaan ( 3.16 ), maka akan didapat persamaan:

$$[-\omega_n^2 m \phi_n + k \phi_n] q_n(t) = 0 \dots\dots\dots(3.20)$$

Solusi trivial dari persamaan ( 3.20 ) dimana  $q_n(t)=0$  akan menghasilkan  $u(t)=0$ . Hal ini berarti tidak ada pergerakan dalam struktur. Solusi non trivial persamaan ( 3.20 ) akan menghasilkan :

$$\left[-\omega_n^2 m + k\right] \phi_n = 0 \dots\dots\dots( 3.21 )$$

Untuk mendapatkan solusi non trivial persamaan ( 3.21 ) maka

$$\det\left[-\omega_n^2 m + k\right] = 0$$

Atau

$$\det\left[k - \lambda_n m\right] = 0$$

Dimana  $\lambda_n = \omega_n^2$  adalah eigenvalue.

Penyelesaian persamaan polinomial ini akan menghasilkan N akar real dan positif untuk masing-masing  $\lambda_n (\omega_n^2)$ , karena matriks massa dan matriks kekakuan struktur merupakan matriks simetris dan definitif positif. Akar-akar real ini akan menghasilkan n buah frekuensi getar alami, yang disebut nilai eigen dimana  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_n$ . Jika nilai eigen dimasukkan ke dalam persamaan ( 3.21 ), maka akan diperoleh N buah vektor independent  $\phi_n$ , yang dikenal sebagai eigen vektor atau pola getar alami.

### 3.3.2. Persamaan Modal [ 2 ]

Persamaan kesetimbangan ( 3.13 ) merupakan persamaan yang saling berhubungan ( coupled equations ) dapat ditransformasikan menjadi persamaan yang tidak saling berhubungan ( uncouple equation ) dengan mensubstitusikan persamaan ( 3.17 ) ke dalam persamaan ( 3.13 ), sehingga :

$$\sum_{R=1}^N m \phi_r q_r + \sum_{R=1}^N c \phi_r q_r + \sum_{R=1}^N k \phi_r q_r = -M \ddot{u}_g(t) \dots\dots\dots( 3.22 )$$

Dengan mengalikan persamaan ( 3.22 ) dengan  $\phi_n^T$ , maka:

$$\sum_{R=1}^N \phi_r^T m \phi_r q_r + \sum_{R=1}^N \phi_r^T c \phi_r q_r + \sum_{R=1}^N \phi_r^T k \phi_r q_r = -\phi_r^T M \ddot{u}_g(t) \dots\dots\dots( 3.23 )$$

Karena sifat ortogonalitas, setiap elemen penjumlahan akan hilang kecuali  $r = n$ , sehingga persamaan ( 3.23 ) dapat disederhanakan menjadi

$$M_n \ddot{q}_n + C_n \dot{q}_n + K_n q_n = P_n(t) \dots\dots\dots (3.24)$$

Dimana

$$M_n = \phi_n^T m \phi_n$$

$$K_n = \phi_n^T k \phi_n$$

$$C_n = \phi_n^T c \phi_n$$

$$P_n = \phi_n^T p(t)$$

Persamaan ( 3.24 ) identik dengan persamaan dari struktur dengan satu derajat kebebasan. Untuk selanjutnya persamaan (3.24 ) dapat diselesaikan dengan menggunakan integrasi dalam domain waktu maupun frekuensi.

### 3.3.3. Analisa Respons Spektrum

Respons spektrum menggambarkan respons maksimum dari semua struktur linier satu derajat kebebasan terhadap suatu pergerakan gempa bumi. Respons maksimum dapat digambarkan sebagai fungsi respons percepatan, kecepatan, atau peralihan terhadap periode atau frekuensi dari struktur SDOF. Setiap respons spektrum digambarkan dengan suatu rasio redaman, sehingga variasi respons spektrum dapat ditulis :

$$q_n^{\max}(T_n, \xi) = \max |q_n(t, T_n, \xi)|$$

$$\dot{q}_n^{\max}(T_n, \xi) = \max |\dot{q}_n(t, T_n, \xi)|$$

$$\ddot{q}_n^{\max}(T_n, \xi) = \max |\ddot{q}_n(t, T_n, \xi)|$$

Dengan konsep superposisi modal, struktur MDOF dapat diuraikan menjadi n buah struktur SDOF seperti dalam persamaan ( 3.24 ), sehingga respons maksimum dari setiap mode dapat dianalisis secara terpisah. Dan untuk mendapatkan respons total, dilakukan penjumlahan respons spektrum dari masing-masing mode. Penjumlahan ini dilakukan dengan pendekatan probabilistik, karena respons maksimum seluruh mode tidak berada pada waktu yang sama. Untuk mengkombinasikan respons spektrum dari setiap mode dapat menggunakan metode :

1. Metode CQC ( *Complete Quadratic Combination* )

$$r_0 = \left( \sum_{n=1}^N r_{n0}^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{n=1}^N \rho_{in} r_{i0} r_{n0} \right)^{1/2}$$

Dimana :

$r_0$  = respons maksimum total

$r_{n0}$  = respons maksimum mode ke n

$r_{ni}$  = respons maksimum mode ke i

$$\rho_{in} = \frac{8\xi^2 (1 + \beta_{in}) \beta_{in}^{3/2}}{(1 - \beta_{in}^2) + 4\xi^2 \beta_{in} (1 + \beta_{in})^2}$$

$$\beta_{in} = \frac{\omega_i}{\omega_n}$$

2. Metode SRSS ( *Square Root of the Sum of Squares* )

$$r_0 = \left( \sum_{n=1}^N r_{n0}^2 \right)^{1/2}$$

3. Metode ABS ( *Absolute* )

$$r_0 = \sum_{n=1}^N |r_{n0}|$$