

BAB 4

LOGICAL VALIDATION MELALUI PEMBANDINGAN DAN ANALISA HASIL SIMULASI

4.1 TINJAUAN UMUM

Tahapan simulasi pada pengembangan solusi numerik dari model adveksi-dispersi dilakukan untuk tujuan mempelajari tingkah laku model yang bersangkutan. Untuk melakukan simulasi pada model, perlu ditentukan nilai parameter awal seperti kecepatan aliran, koefisien dispersi, panjang tiap ruas sungai dan besar pembebanan yang diberikan. Oleh karena itu, digunakan beberapa skenario simulasi pada model matematis untuk memperlihatkan respons dan sensitivitas model dalam memproses input berupa data hipotetik, mulai dari data hidrolika sungai hingga nilai *initial condition* dan *boundary condition* dari BOD pada tiap ruas sungai.

Tahap simulasi pertama, yaitu untuk menentukan pola penyebaran BOD menurut jarak dan waktu, dengan menggunakan sebaran beban yang hanya diberikan pada ruas pertama dan besarnya konstan menurut fungsi waktu.

Tahap simulasi kedua bermaksud untuk menentukan pola penyebaran BOD menurut jarak dan waktu dengan jenis sebaran beban berupa pembebanan non konstan pada ruas pertama, yaitu sebaran beban yang besarnya berubah menurut fungsi waktu.

4.2 SKENARIO DAN PROSES SIMULASI

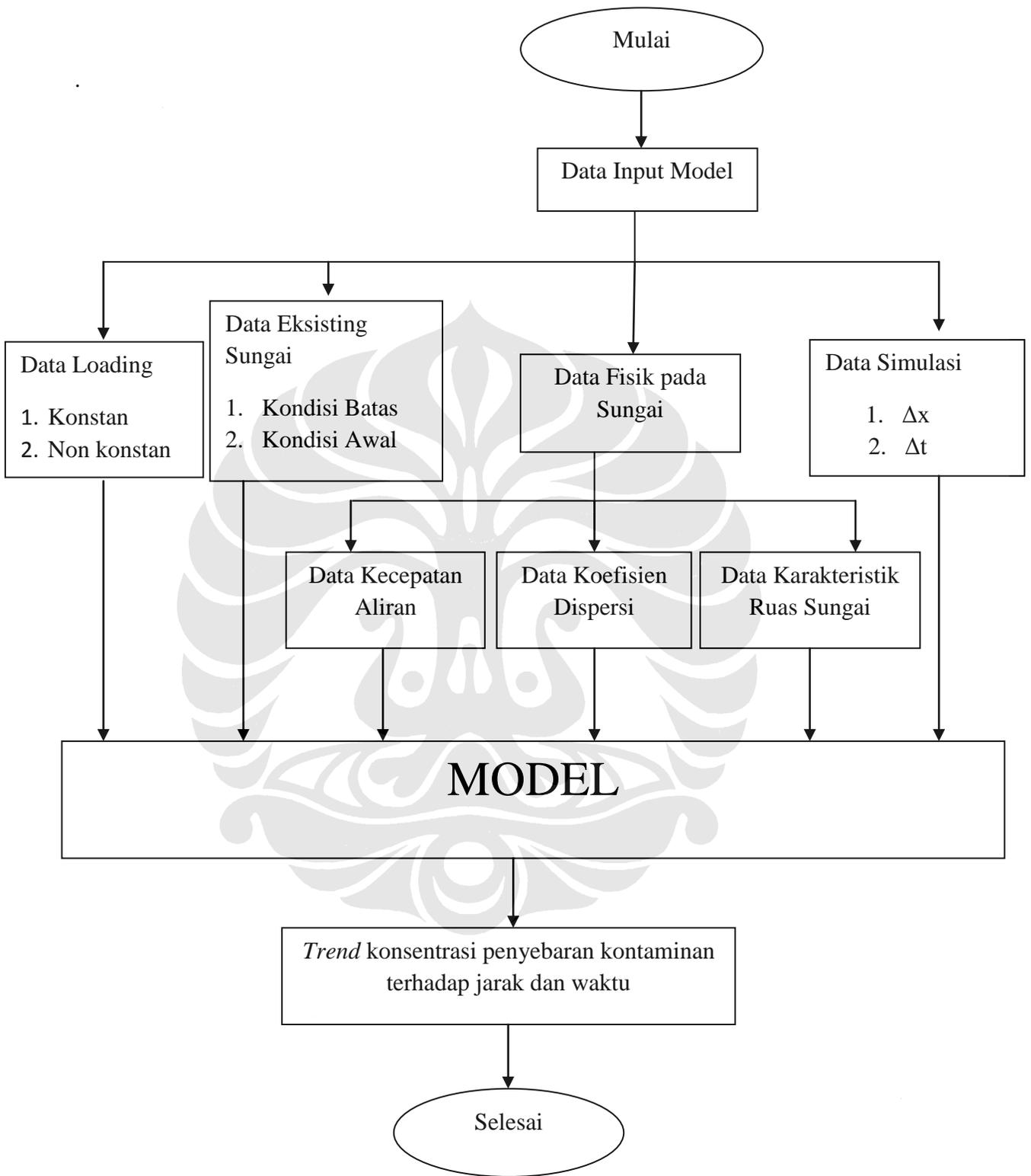
Secara umum, parameter yang diberikan dalam formulasi numerik pada model adveksi-dispersi memiliki nilai yang dikondisikan tidak berbeda dengan model QUAL2K. Hal ini dimaksudkan agar perbandingan antara kedua model tersebut dapat

dilakukan, dan hasil *running* antara kedua model diharapkan tidak memiliki selisih diluar batas yang dapat ditoleransikan.

Karakteristik formulasi numerik pada model adveksi-dispersi antara lain :

1. Model bersifat satu dimensi, yaitu dalam arah sumbu-x global. Aliran air akan diaproksimasikan dengan jenis *1-dimensional flows*.
2. Aliran yang disimulasikan bersifat *uniform* dalam hal profil (distribusi) kecepatan, massa jenis air, *steady* dalam hal kecepatan aliran ($dv/dt=0$), tetapi *unsteady* dalam hal konsentrasi konstituen terlarut.
3. Model ini tidak mengakomodasi badan air dengan percabangan. Badan air hipotetik yang akan disimulasikan tidak memiliki anak sungai maupun bentuk percabangan lainnya.
4. Mekanisme yang diperhitungkan adalah mekanisme adveksi dan dispersi. Komponen lain dalam formulasi *mass balance*, seperti mekanisme reaksi dan *settling* diasumsikan tidak terjadi atau bernilai sangat kecil sehingga dapat diabaikan.
5. *Loading* yang terjadi berbentuk *point-source*. *Loading* berbentuk *non-point source* tidak diakomodasi dalam pengembangan model matematis.
6. Tidak terdapat mekanisme *withdrawals* atau abstraksi disepanjang badan sungai yang disimulasikan, baik berbentuk *point* maupun *non-point withdrawals*.

Dalam merekayasa suatu skenario secara spesifik untuk dimasukkan kedalam simulasi formulasi numerik, pertama-tama harus diidentifikasi jenis dan jumlah data input berupa parameter yang diperlukan dalam melakukan *running* simulasi tersebut. Dari Gambar 4.1 dapat dilihat tahapan proses simulasi, mulai dari menentukan ragam data input berupa parameter yang perlu didefinisikan untuk kemudian dimasukkan kedalam model numerik.



Gambar 4.1 Proses simulasi pada model

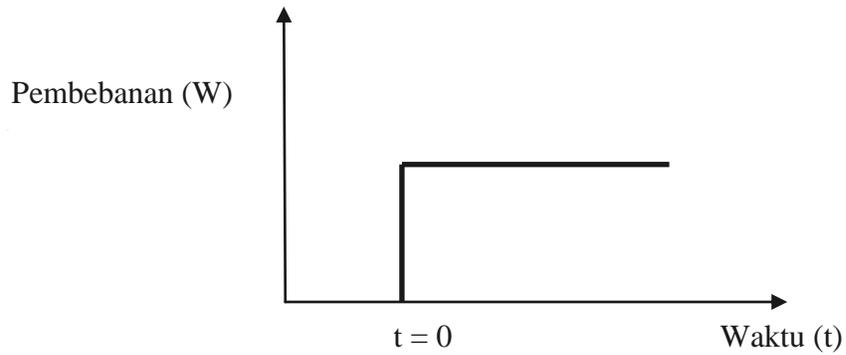
Seluruh data yang diperlukan dalam proses simulasi diatas merupakan data hipotetik, yang detailnya dapat dijelaskan seperti berikut :

- a. Data jenis pembebanan, dimana jenisnya dapat berupa beban konstan maupun beban non konstan.
- b. Data kondisi eksisting sungai, yaitu kondisi batas (*boundary condition*) dan kondisi awal (*initial condition*) dari nilai BOD pada tiap ruas sungai.
- c. Data fisik ruas sungai, meliputi kedalaman sungai, lebar sungai, luas penampang sungai, nilai kecepatan aliran sungai (u) serta nilai koefisien dispersi (D).
- d. Data simulasi, meliputi besar interval jarak (Δx) dan besar interval waktu (Δt).

4.2.1 Beban Konstan

Pada suatu daerah perkotaan kecil yang belum mengalami perkembangan pesat, dimana tingkat pertumbuhan populasi penduduk sangat kecil dan hampir mendekati angka nol, dapat dinyatakan bahwa jumlah penduduk pada masa sekarang dengan prakiraan jumlah penduduk beberapa tahun kedepan tidak akan mengalami perubahan yang signifikan. Fenomena ini diakibatkan besarnya rata-rata tingkat kematian per periode waktu sama dengan rata-rata tingkat kelahirannya. Hal ini yang menyebabkan produksi limbah cair maupun padat yang pembuangannya diarahkan ke ruas sungai terdekat dari daerah tersebut akan bernilai konstan setiap tahunnya.

Sebaran beban konstan seperti yang terjadi pada kasus daerah perkotaan kecil tersebut dapat dikategorikan sebagai jenis beban dimana nilainya tetap dan tidak berubah menurut waktu, atau umum dikenal sebagai *step loading*. Pada formulasi numerik, skenario beban konstan tersebut diberikan hanya pada ruas pertama dari susunan serial ruas sungai yang disimulasikan, dimana nilai beban diambil sebesar $W = 10 \text{ kg / jam}$. Respons model berupa nilai konsentrasi terhadap jarak dan waktu akan digunakan untuk diperbandingkan dengan *trend* hasil simulasi model QUAL2K.



Gambar 4.2 Konseptualisasi sebaran beban konstan terhadap waktu

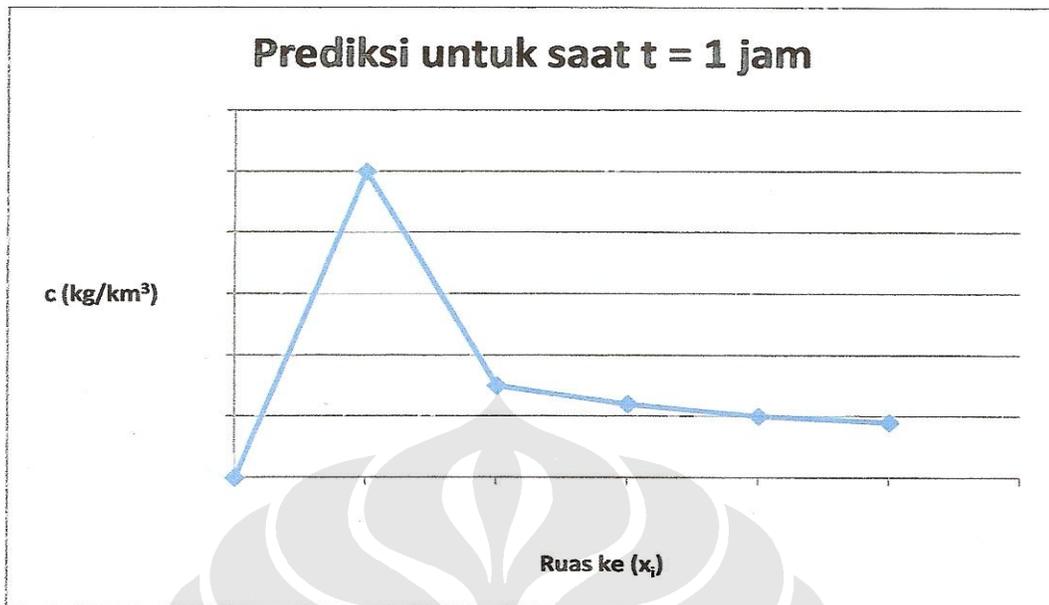
Simulasi beban konstan merupakan suatu skenario simulasi yang dimanfaatkan untuk menguji kehandalan model numerik berdasarkan setiap parameter yang di-input. Semua parameter dan data fisik untuk skenario beban konstan diberikan oleh suatu nilai hipotetik yang detailnya dapat ditabulasikan pada tabel berikut :

Tabel 4.1 Parameter simulasi beban konstan

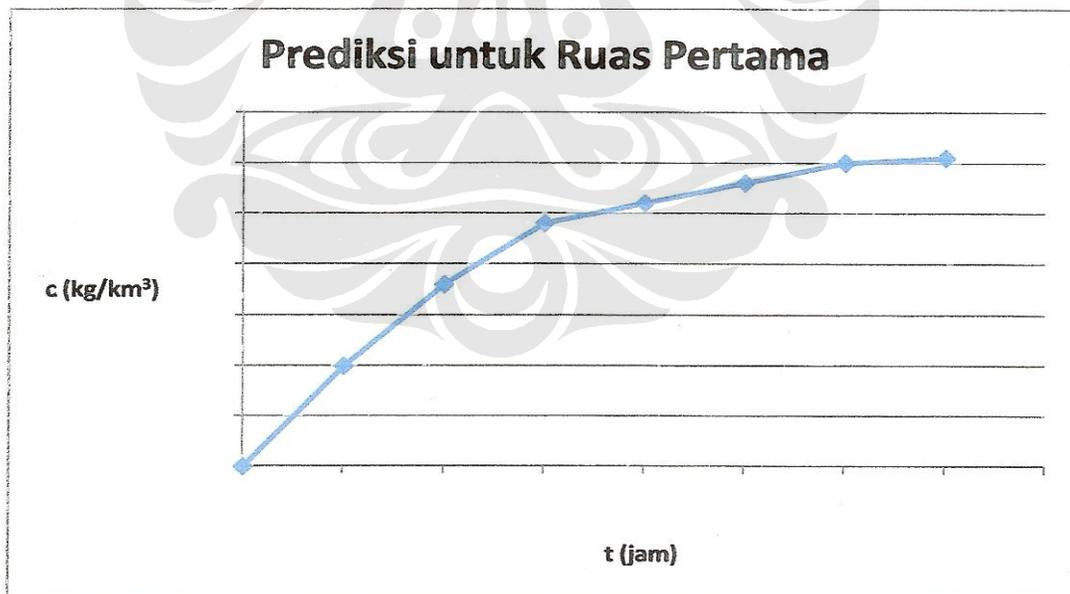
	Ruas 1	Ruas 2	Ruas 3	Ruas 4	Ruas 5
Δx (km)	10	10	10	10	10
A (km ²)	10	10	10	10	10
V (km ³)	100	100	100	100	100
W (kg/h)	10	0	0	0	0
W/V (kg/km ³ h)	0.1	0	0	0	0
u (km/h)	8	8	8	8	8
D (km ² /h)	7	7	7	7	7
Δt (h)	1	1	1	1	1
Initial Condition (kg/km ³)				4	
Boundary Condition (kg/km ³)				4	

Prediksi awal akan hasil *running* simulasi dengan beban konstan pada suatu sungai saat $t = 1$ jam seharusnya berbentuk grafik seperti yang terlihat pada Gambar 4.3, dimana nilai konsentrasi paling tinggi berada pada ruas pertama, yaitu pada lokasi diberikannya pembebanan dengan nilai konstan. Gambar 4.4 melukiskan nilai konsentrasi hanya pada ruas sungai pertama dari mulai $t_1 = 1$ jam hingga $t_7 = 7$ jam. Kurva pada gambar tersebut memperlihatkan pola nilai konsentrasi pada ruas pertama yang makin lama makin bertambah menuju suatu nilai tertentu seiring dengan pertambahan waktu. Hal ini sangat logis bila dilihat dari lokasi pembebanan dengan nilai konstan yang memang ditempatkan hanya pada ruas pertama. Selain itu, nilai konsentrasi pada ruas pertama lama-kelamaan akan menuju suatu nilai tertentu sehingga tercapainya keadaan stabil dimana nilai konsentrasi pada ruas pertama tersebut tidak akan lagi mengalami perubahan konsentrasi yang signifikan seiring waktu, atau dapat dikatakan mendekati suatu kondisi yang *steady*.

Seiring dengan pertambahan waktu, nilai konsentrasi pada ruas pertama akan dapat terus bertambah ataupun berkurang, bergantung pada tingkat kemampuan sungai dalam menguraikan dan mengurangi kandungan dari suatu materi pencemar maupun kosntituen lain yang masuk kedalamnya. Secara umum, semua mekanisme yang diasumsikan terjadi pada ruas sungai dapat di-*lumpsum* dalam sebuah notasi λ , dimana makin besar nilai λ , maka makin besar pula kemampuan sungai untuk memulihkan diri dari pembebanan berupa kontaminan yang diberikan padanya.



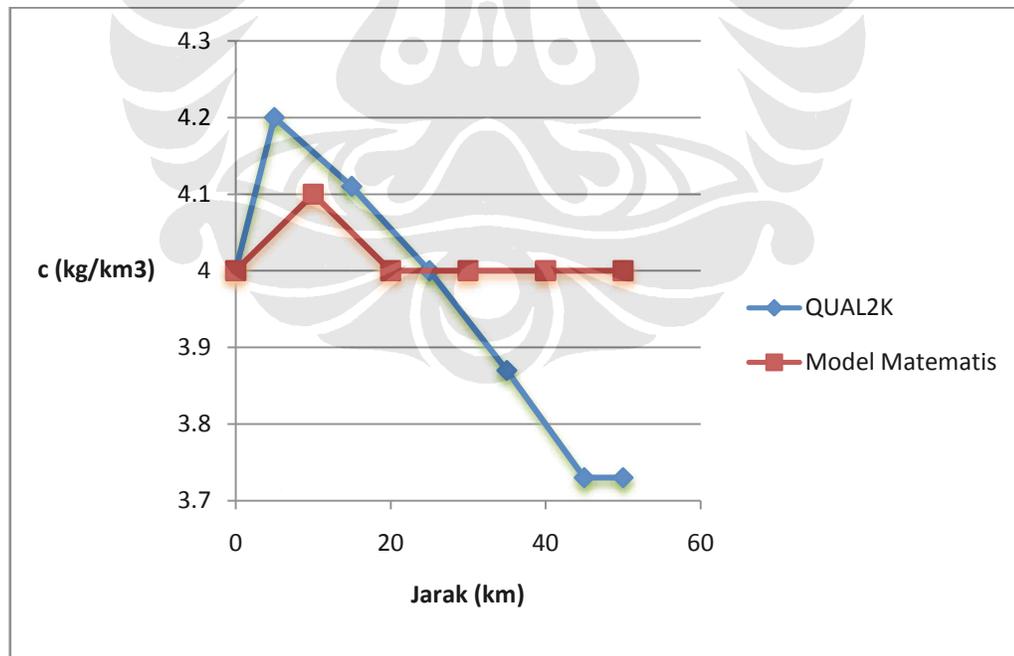
Gambar 4.3 Grafik prediksi awal nilai konsentrasi terhadap ruas saat $t_1 = 1$ jam untuk beban konstan



Gambar 4.4 Grafik prediksi awal nilai konsentrasi terhadap waktu pada ruas pertama untuk beban konstan

Output dari simulasi beban konstan pada model adveksi-dispersi berupa grafik konsentrasi BOD terhadap jarak pada setiap satuan waktu, dimulai dari $t = 0$ hingga $t = 3$ jam. Skenario yang digunakan untuk proses *running* simulasi ini terdapat pada Tabel 4.1. Hasil berupa grafik dari model matematis akan diperbandingkan dengan grafik keluaran QUAL2K dengan input nilai parameter yang sama untuk menganalisa dan memvalidasi model numerik yang telah selesai dikembangkan, dengan catatan grafik dari model adveksi-dispersi yang diperbandingkan dengan QUAL2K adalah hasil simulasi pada saat awal, yaitu grafik pada saat $t = 1$ jam.

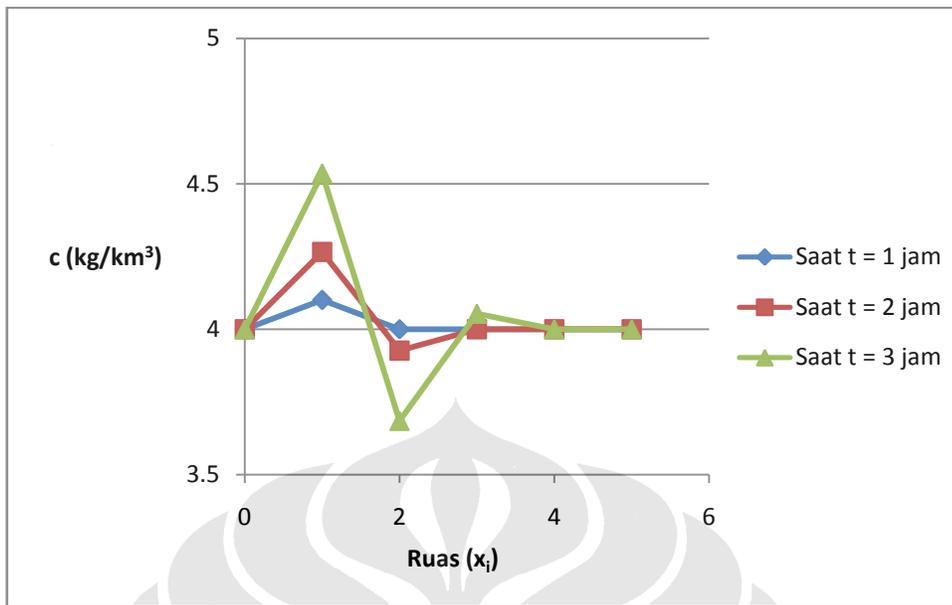
Hasil simulasi untuk tujuan perbandingan model matematis terhadap QUAL2K dapat diperlihatkan pada Gambar 4.5. Dari gambar tersebut, sumbu-x menyatakan jarak, sumbu-y menyatakan nilai konsentrasi. Masing-masing kurva menyatakan nilai konsentrasi pada model matematis dan nilai konsentrasi pada QUAL2K.



Gambar 4.5 Hasil simulasi nilai konsentrasi terhadap jarak pada QUAL2K dan model matematis menggunakan beban konstan

Dapat dilihat pada gambar tersebut bahwa nilai konsentrasi relatif mengalami penurunan yang stabil pada bagian hilir, tetapi memiliki nilai maksimum pada daerah hulu dibagian ruas tempat diberikan pembebanan dengan nilai konstan. *Trend* grafik simulasi QUAL2K ini memiliki pola sama dengan kurva hasil simulasi pada prediksi awal, dimana titik-titik puncak kurva berupa nilai konsentrasi akan dihasilkan oleh ruas dimana *loading* diberikan, yaitu ruas pertama, sehingga dapat dinyatakan bahwa *output* simulasi nilai konsentrasi yang dihasilkan adalah logis dan dapat diandalkan. Sedangkan pada kurva milik model adveksi-dispersi, *trend* grafik pada ruas dibagian hulu tidak jauh berbeda dengan *trend* prediksi awal dan trend QUAL2K, dimana hal ini menyatakan bahwa hasil *running* model matematis cukup logis dan handal. Akan tetapi, makin jauh ke hilir nilai konsentrasi yang dihasilkan oleh formulasi numerik model matematis untuk $t = 1$ jam tidak menunjukkan perubahan nilai dari kondisi awalnya, sehingga nilai yang dihasilkan agak sedikit berbeda dari pola konsentrasi pada bagian hilir dari hasil *running* QUAL2K maupun dari pola grafik prediksi awal. Perbedaan ini dapat disebabkan oleh osilasi yang terjadi akibat pendekatan numerik yang dilakukan untuk menyelesaikan model matematis, maupun akibat akomodasi parameter kompleks pada QUAL2K yang tidak dapat terakomodasi pada model adveksi-dispersi.

Gambar 4.6 merupakan hasil simulasi dari model adveksi-dispersi yang menyatakan nilai konsentrasi terhadap jarak berupa ruas dengan beban konstan, dari mulai $t = 1$ jam hingga $t = 3$ jam. Sumbu-x dari grafik tersebut menyatakan jarak dalam bentuk ruas, dan sumbu-y menyatakan nilai konsentrasi.



Gambar 4.6 Grafik konsentrasi model matematis terhadap jarak berupa ruas menggunakan beban konstan dengan berbagai selang waktu

Gambar 4.6 memperlihatkan pola kurva untuk nilai konsentrasi terhadap setiap ruas tidak jauh berbeda dengan pola kurva prediksi awal. Hanya saja, semakin banyak *running* simulasi yang dilakukan untuk setiap interval waktu Δt , maka makin terlihat besar osilasi yang muncul pada ruas kedua, yang mana osilasi ini terus akan merambat menuju ruas kelima dibagian hilir sungai. Dapat dilihat bahwa nilai konsentrasi pada ruas dua saat $t_1 = 1$ jam masih sama dengan nilai *initial condition* yang diberikan, yaitu sebesar 4, kemudian nilai konsentrasi pada ruas dua saat $t_2 = 2$ jam berubah menjadi sebesar 3.927. Osilasi berlanjut seiring berjalannya waktu, sehingga dapat dilihat bahwa pada saat $t_3 = 3$ jam, nilai konsentrasi pada ruas dua mendekati angka 3.68. Hal ini membuktikan bahwa osilasi yang terjadi akan makin lama makin besar seiring dengan berjalannya waktu. Dapat dinyatakan bahwa hasil *running* formulasi numerik dapat diandalkan untuk jangka waktu simulasi cukup pendek. Semakin banyak hasil perhitungan dilakukan untuk tiap interval waktu, makin lebar besar galat berupa osilasi pada *output*. Osilasi tersebut dapat diperkecil dengan memasukkan harga Δt dan Δx yang lebih kecil dari skenario sebelumnya.

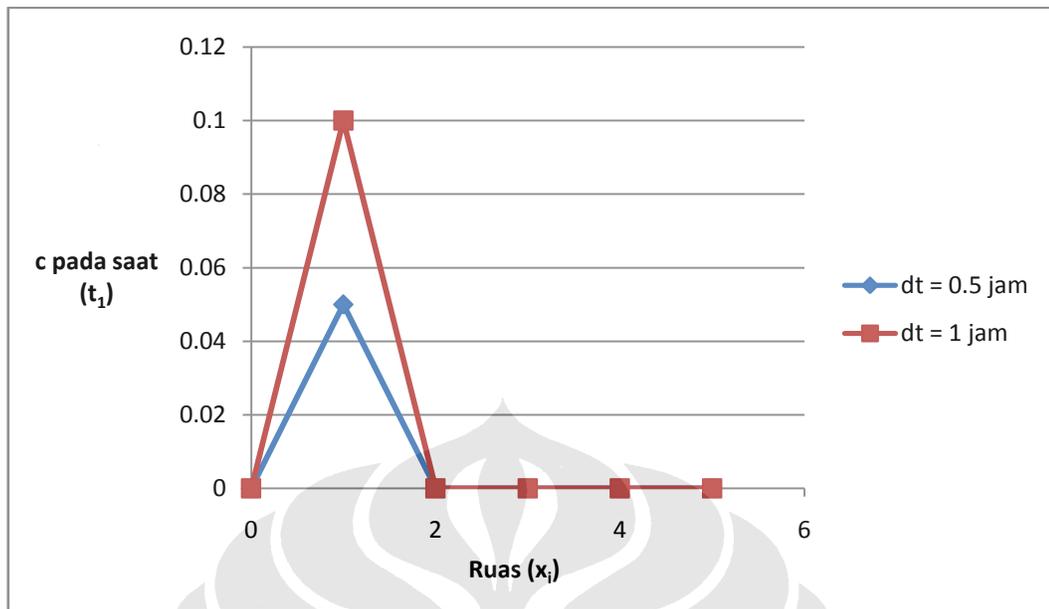
4.2.1.1 Pengujian sensitivitas model terhadap parameter Δt

Cara lain dalam meminimalisir besar osilasi yang terjadi dalam formulasi numerik adalah dengan memperkecil nilai interval waktu Δt . Simulasi beban konstan dengan nilai parameter interval waktu akan diperkecil menjadi $\Delta t = 0.5$ jam. Semua parameter dan data fisik memiliki detail yang ditabulasikan pada tabel berikut :

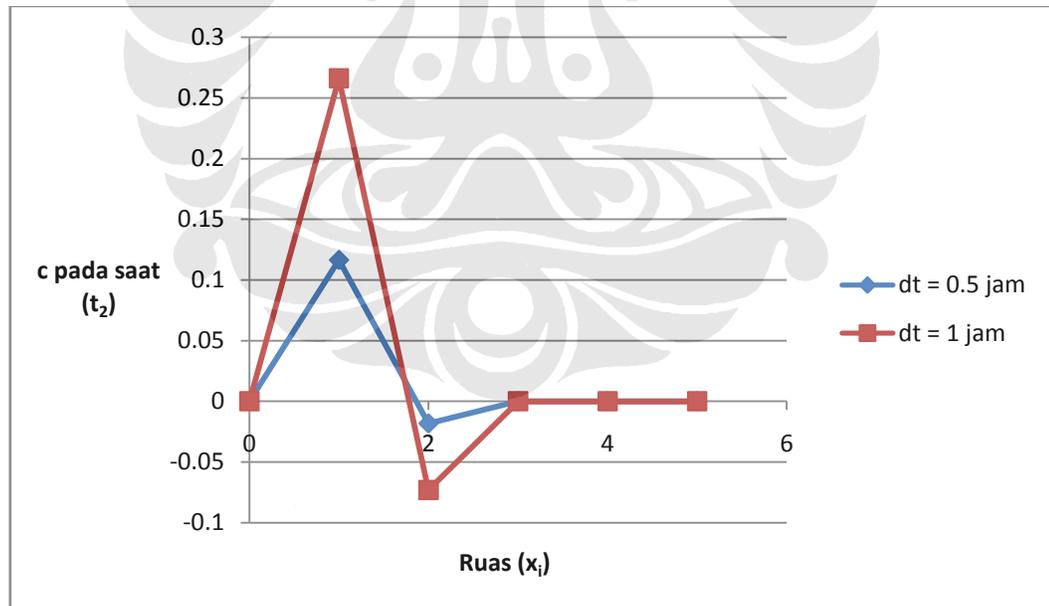
Tabel 4.2 Parameter simulasi beban konstan dengan memperkecil Δt

	Ruas 1	Ruas 2	Ruas 3	Ruas 4	Ruas 5
Δx (km)	10	10	10	10	10
A (km ²)	10	10	10	10	10
V (km ³)	100	100	100	100	100
W (kg/h)	10	0	0	0	0
W/V (kg/km ³ h)	0.1	0	0	0	0
u (km/h)	8	8	8	8	8
D (km ² /h)	7	7	7	7	7
Δt (h)	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
Initial Condition (kg/km ³)	0				
Boundary Condition (kg/km ³)	0				

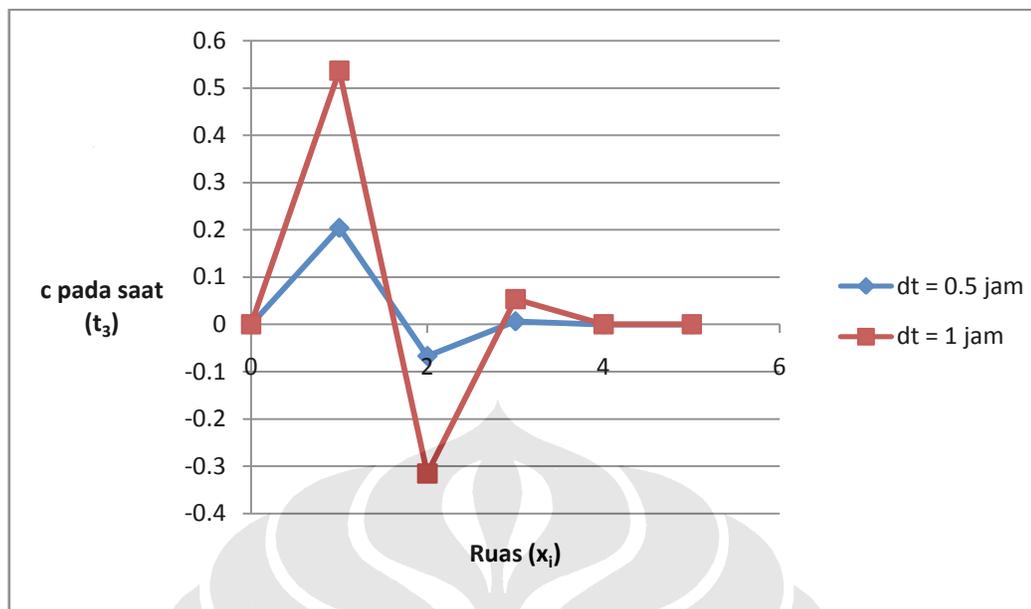
Hasil simulasi kemudian ditunjukkan pada Gambar 4.7, Gambar 4.8, dan Gambar 4.9. Gambar 4.7 menyatakan nilai konsentrasi pada semua ruas sungai dengan dt diperkecil pada saat t_1 , Gambar 4.8 menyatakan nilai konsentrasi pada semua ruas sungai dengan dt diperkecil pada saat t_2 , dan Gambar 4.9 menyatakan nilai konsentrasi pada semua ruas sungai dengan dt diperkecil pada saat t_3 . Pada ketiga gambar tersebut, sumbu-x menyatakan jarak dalam bentuk ruas, sumbu-y menyatakan nilai konsentrasi.



Gambar 4.7 Grafik konsentrasi terhadap ruas pada saat t_1 dengan dt diperkecil menggunakan beban konstan

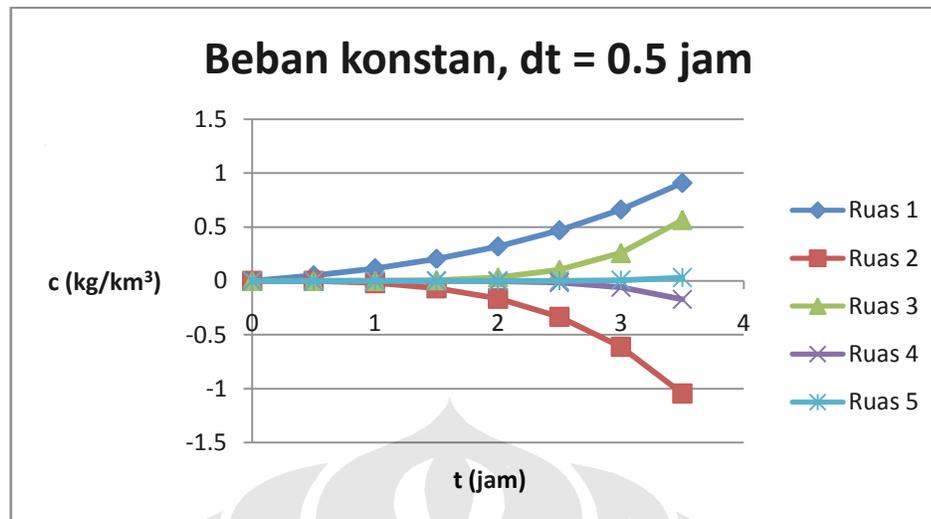


Gambar 4.8 Grafik konsentrasi terhadap ruas pada saat t_2 dengan dt diperkecil menggunakan beban konstan



Gambar 4.9 Grafik konsentrasi terhadap ruas pada saat t_3 dengan dt diperkecil menggunakan beban konstan

Dari Gambar 4.7, Gambar 4.8, dan Gambar 4.9 terlihat pola transportasi materi dalam ruas sungai yang bervariasi terhadap jarak dan waktu. Pada kurva yang ditinjau saat $t_1 = 0.5$ jam, nilai konsentrasi pada ruas dua sama dengan nol, pada saat yang bersamaan nilai konsentrasi pada ruas pertama mencapai puncak tertinggi akibat pembebanan yang diberikan pada saat $t = 0$. Nilai konsentrasi pada ruas dua berubah menjadi sekitar -0.018 pada saat $t_2 = 1$ jam. Akibat osilasi yang terus berlangsung, nilai konsentrasi pada ruas dua berubah menjadi sekitar -0.067 pada saat $t_3 = 1.5$ jam, dimana pada saat yang bersamaan mulai terlihat bahwa osilasi merambat pada ruas sungai dihilir, yaitu ruas tiga, hanya saja pada ruas ketiga, nilai konsentrasi memiliki nilai positif dan berkisar pada angka 0.007. Secara garis besar, perbandingan kedua kurva pada ketiga grafik diatas menyatakan nilai konsentrasi dengan osilasi yang lebih kecil dibandingkan nilai konsentrasi pada saat penggunaan $\Delta t = 1$ jam. Dapat disimpulkan bahwa model bersifat sensitif terhadap nilai parameter Δt dan osilasi dapat diminimalisir dengan cara memperkecil nilai Δt yang dipergunakan.



Gambar 4.10 Grafik konsentrasi terhadap waktu pada semua ruas menggunakan beban konstan dengan $dt = 0.5$ jam

Gambar 4.10 menunjukkan hasil simulasi pada semua ruas sungai dengan skenario beban konstan dan $dt = 0.5$ jam. Pada gambar tersebut, sumbu-x menyatakan interval waktu dan sumbu-y menyatakan nilai konsentrasi, sedangkan masing-masing kurva mewakili nilai konsentrasi terhadap waktu pada tiap ruas sungai.

Dari Gambar 4.10 terlihat bagaimana konsentrasi pada ruas sungai yang pertama mula-mula bernilai nol, kemudian mulai naik seiring waktu dan mencapai nilai tertinggi sebesar 0.91 pada selang waktu terakhir, yaitu saat $t_7 = 3.5$ jam. Ruas kedua dan ruas keempat memiliki pola berlawanan dengan ruas satu, dimana pada waktu mula-mula keduanya bernilai nol, kemudian nilainya terus berkurang menurut waktu hingga mencapai nilai terendah, yaitu -1.04 untuk ruas dua dan sekitar -0.17 untuk ruas empat. Ruas ketiga dan kelima memiliki pola kurva yang tidak jauh berbeda dengan ruas pertama, yaitu bernilai nol pada waktu mula-mula, kemudian bertambah menuju nilai tertingginya pada selang waktu terakhir, dengan nilai 0.56 untuk ruas tiga dan nilai 0.03 untuk ruas lima. Nilai konsentrasi bertanda negatif yang diperlihatkan oleh hasil simulasi pada ruas kedua dan keempat menandakan osilasi dikarenakan penyelesaian model matematis dengan pendekatan numerik.

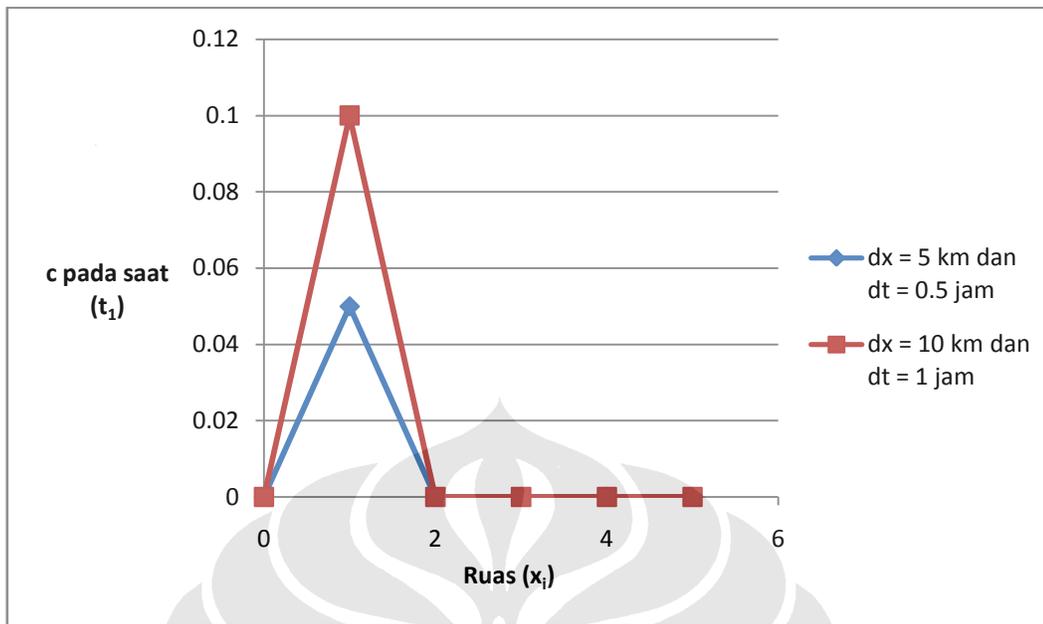
4.2.1.2 Pengujian sensitivitas model terhadap parameter Δx

Salah satu cara yang dapat digunakan dalam memperkecil besar osilasi yang terjadi pada formulasi numerik adalah dengan memperkecil nilai interval jarak Δx , dimana pemodel juga harus memperkecil besar Δt . Simulasi beban konstan dengan nilai parameter interval jarak yang diperkecil menjadi $\Delta x = 5$ km dan nilai interval waktu yang diperkecil menjadi $\Delta t = 0.5$ jam. Semua parameter dan data fisik memiliki detail yang ditabulasikan pada tabel berikut :

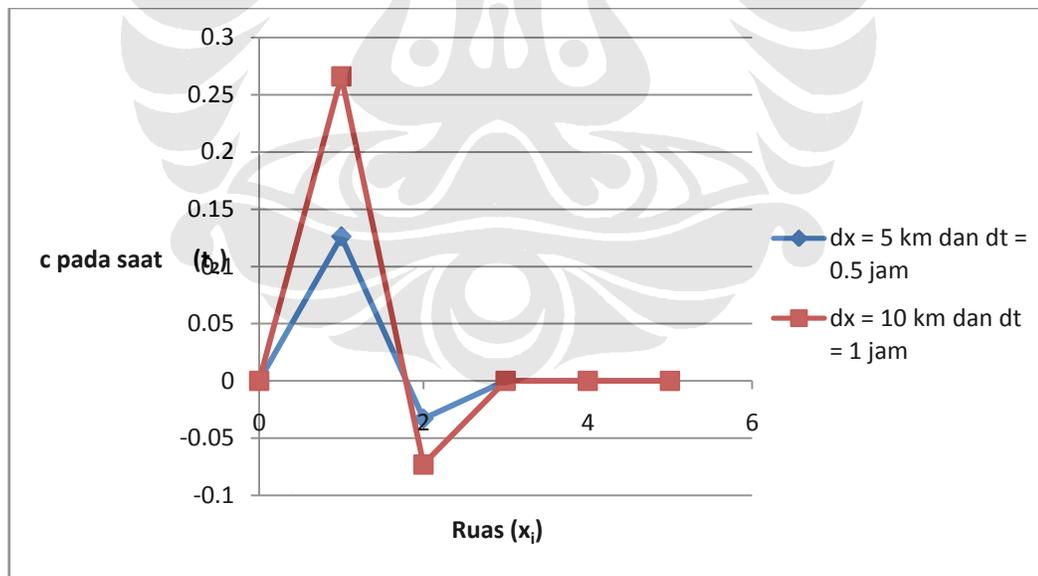
Tabel 4.3 Parameter simulasi beban konstan dengan memperkecil Δx dan Δt

	Ruas 1	Ruas 2	Ruas 3	Ruas 4	Ruas 5
Δx (km)	5	5	5	5	5
A (km ²)	10	10	10	10	10
V (km ³)	100	100	100	100	100
W (kg/h)	10	0	0	0	0
W/V (kg/km ³ h)	0.1	0	0	0	0
u (km/h)	8	8	8	8	8
D (km ² /h)	7	7	7	7	7
Δt (h)	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
Initial Condition (kg/km ³)			0		
Boundary Condition (kg/km ³)			0		

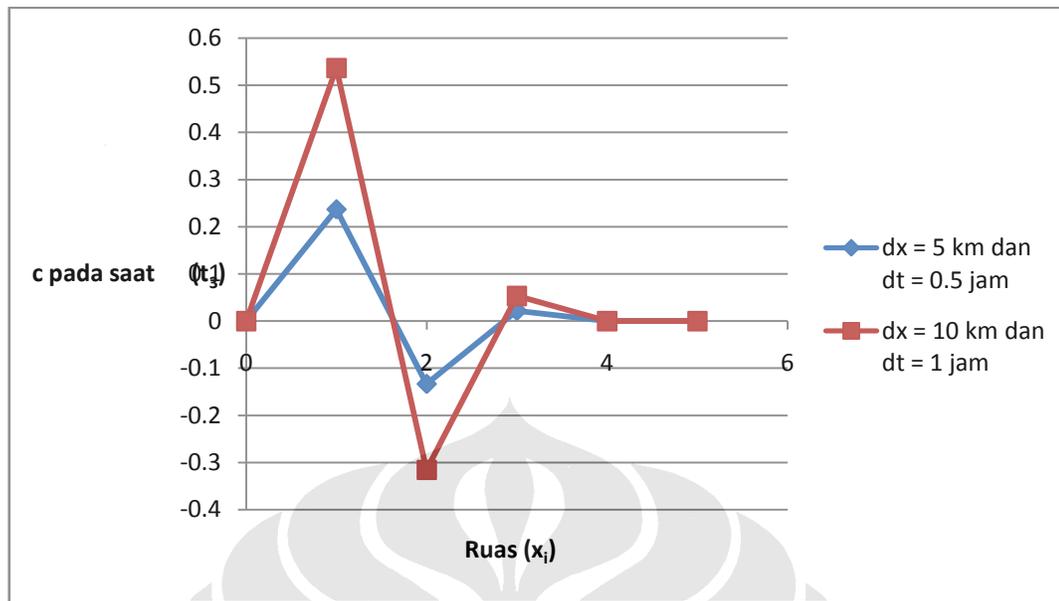
Hasil simulasi kemudian ditunjukkan pada Gambar 4.11, Gambar 4.12, dan Gambar 4.13. Gambar 4.11 menyatakan nilai konsentrasi pada semua ruas sungai dengan nilai dx dan dt diperkecil pada saat t_1 . Gambar 4.12 menyatakan nilai konsentrasi pada semua ruas sungai dengan nilai dx dan dt diperkecil pada saat t_2 , dan Gambar 4.13 menyatakan nilai konsentrasi pada semua ruas sungai dengan nilai dx dan dt diperkecil pada saat t_3 . Pada ketiga gambar tersebut, sumbu-x menyatakan jarak dalam bentuk ruas, sumbu-y menyatakan nilai konsentrasi.



Gambar 4.11 Grafik konsentrasi terhadap ruas pada saat t_1 dengan dx dan dt diperkecil menggunakan beban konstan



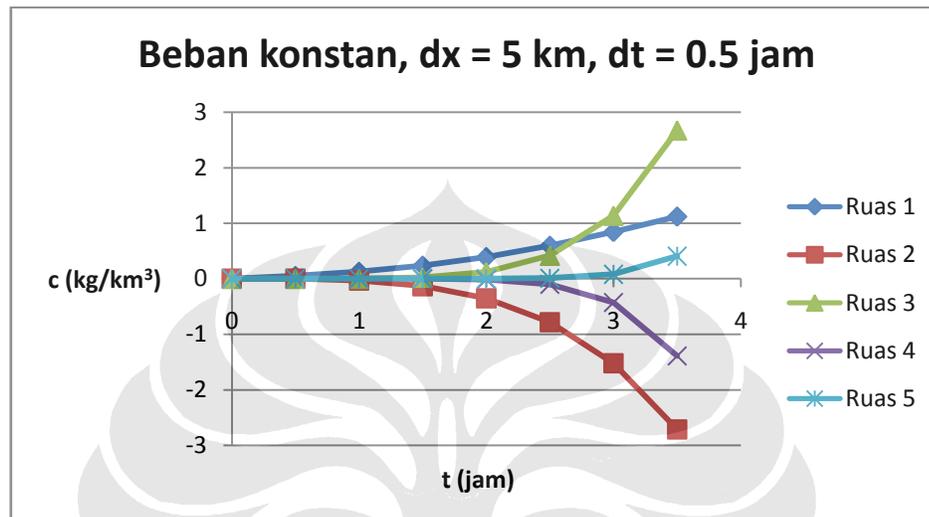
Gambar 4.12 Grafik konsentrasi terhadap ruas pada saat t_2 dengan dx dan dt diperkecil menggunakan beban konstan



Gambar 4.13 Grafik konsentrasi terhadap ruas pada saat t_3 dengan dx dan dt diperkecil menggunakan beban konstan

Dari Gambar 4.11, Gambar 4.12, dan Gambar 4.13 terlihat pola transportasi materi dalam ruas sungai yang bervariasi terhadap jarak dan waktu. Pada kurva yang ditinjau, dengan nilai $dx = 5$ km dan pada saat $t_1 = 0.5$ jam, nilai konsentrasi pada ruas dua masih sama dengan nol, pada saat yang bersamaan nilai konsentrasi pada ruas pertama mencapai puncak tertinggi akibat pembebanan yang diberikan pada saat $t = 0$. Nilai konsentrasi pada ruas dua berubah menjadi sekitar -0.03 pada saat $t_2 = 1$ jam. Osilasi yang semakin lama semakin besar mengakibatkan nilai konsentrasi pada ruas dua berubah menjadi sekitar -0.13 pada saat $t_3 = 1.5$ jam, dimana pada saat yang bersamaan mulai terlihat bahwa osilasi merambat pada ruas sungai dihilir, yaitu ruas tiga, hanya saja pada ruas ketiga, nilai konsentrasi memiliki nilai positif dan berkisar pada angka 0.02. Secara garis besar, perbandingan kedua kurva pada ketiga grafik memperlihatkan angka-angka berupa nilai konsentrasi dengan osilasi yang lebih kecil dibandingkan nilai konsentrasi pada saat nilai parameter $\Delta x = 10$ km dan $\Delta t = 1$ jam. Secara ringkas dapat disimpulkan bahwa penggunaan nilai parameter Δx dan Δt yang

lebih kecil dapat mengurangi besar osilasi yang terjadi akibat pendekatan solusi numerik dalam menyelesaikan model matematis.



Gambar 4.14 Grafik konsentrasi terhadap waktu pada semua ruas menggunakan beban konstan dengan $dx = 5$ km dan $dt = 0.5$ jam

Gambar 4.14 menunjukkan hasil simulasi pada semua ruas sungai dengan skenario beban konstan serta $dx = 0.5$ km dan $dt = 0.5$ jam. Pada gambar tersebut, sumbu-x menyatakan interval waktu dan sumbu-y menyatakan nilai konsentrasi, sedangkan masing-masing kurva mewakili nilai konsentrasi terhadap waktu pada tiap ruas sungai.

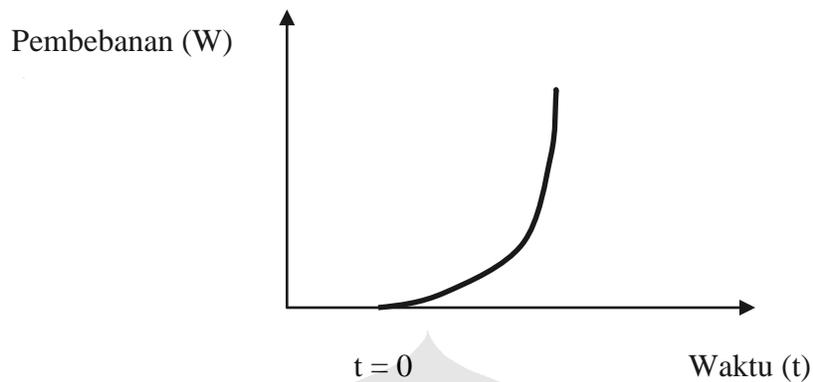
Dari Gambar 4.14 terlihat bagaimana konsentrasi pada ruas sungai pertama mula-mula bernilai nol, kemudian lambat laun mulai naik seiring waktu dan mencapai nilai tertinggi sebesar 1.12 pada selang waktu terakhir, yaitu saat $t_7 = 3.5$ jam. Ruas dua dan ruas empat memiliki pola berlawanan dengan ruas satu, dimana pada waktu mula-mula keduanya bernilai nol, kemudian nilainya terus menerus berkurang menurut waktu hingga mencapai nilai terendah dengan tanda negatif, yaitu -2.71 untuk ruas dua dan sekitar -1.39 untuk ruas empat. Ruas ketiga dan kelima

memiliki pola kurva yang tidak jauh berbeda dengan ruas pertama, yaitu bernilai nol pada waktu mula-mula, kemudian bertambah dengan perlahan menuju nilai tertingginya pada selang waktu terakhir, dengan kisaran nilai 2.67 untuk ruas tiga dan kisaran nilai 0.41 untuk ruas lima. Nilai konsentrasi bertanda negatif yang diperlihatkan oleh hasil simulasi pada ruas kedua dan keempat menandakan terjadinya osilasi akibat ketidak-stabilan pendekatan numerik yang digunakan untuk menyelesaikan model matematis, alih-alih menggunakan pendekatan eksak yang telah baku dan memiliki akurasi sangat tinggi.

4.2.2 Beban Non Konstan

Pada kota-kota berkembang dengan tingkat perekonomian tinggi, tingkat penambahan populasi penduduk umumnya meningkat pula dengan pesat. Pertambahan populasi penduduk dari waktu ke waktu bersifat proporsional dengan tingkat pertumbuhan produksi limbah cair dan padat yang dihasilkan. Hal ini menyebabkan pembebanan berupa limbah yang diterima oleh ruas sungai terdekat dari pemukiman penduduk kota tersebut tidak hanya bertambah dengan konstan secara linier, tetapi merupakan fungsi eksponensial.

Sebaran beban non konstan pada satu daerah perkotaan berkembang memiliki nilai yang terus bertambah seiring dengan pertumbuhan waktu, dimana pembebanan eksponensial ini dapat dispesifikasikan memiliki pendekatan nilai sebesar $W = e^{t_j-1}$. Dalam detail skenario simulasi pada formulasi numerik model adveksi-dispersi, seperti juga halnya beban konstan, beban non konstan diletakkan hanya pada ruas pertama dari susunan beberapa ruas sungai.



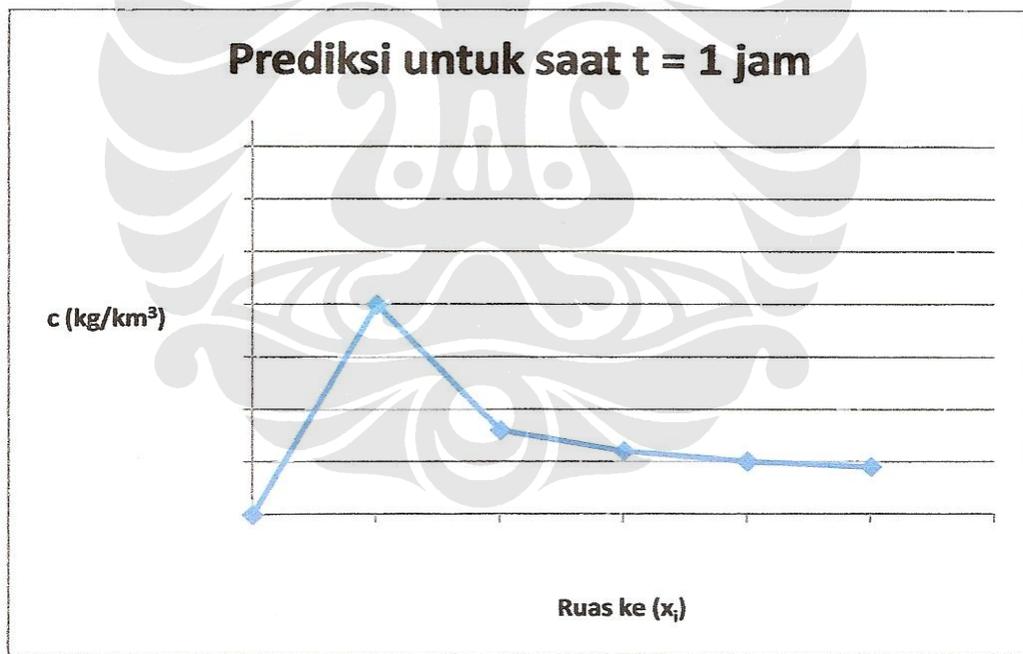
Gambar 4.15 Konseptualisasi sebaran beban non konstan terhadap waktu

Simulasi beban non konstan merupakan salah satu skenario yang bertujuan untuk menguji sensitivitas model terhadap tiap parameter yang dipergunakan. Semua parameter dan data fisik tersebut diberikan oleh suatu nilai hipotetik yang detailnya ditabulasikan pada tabel berikut :

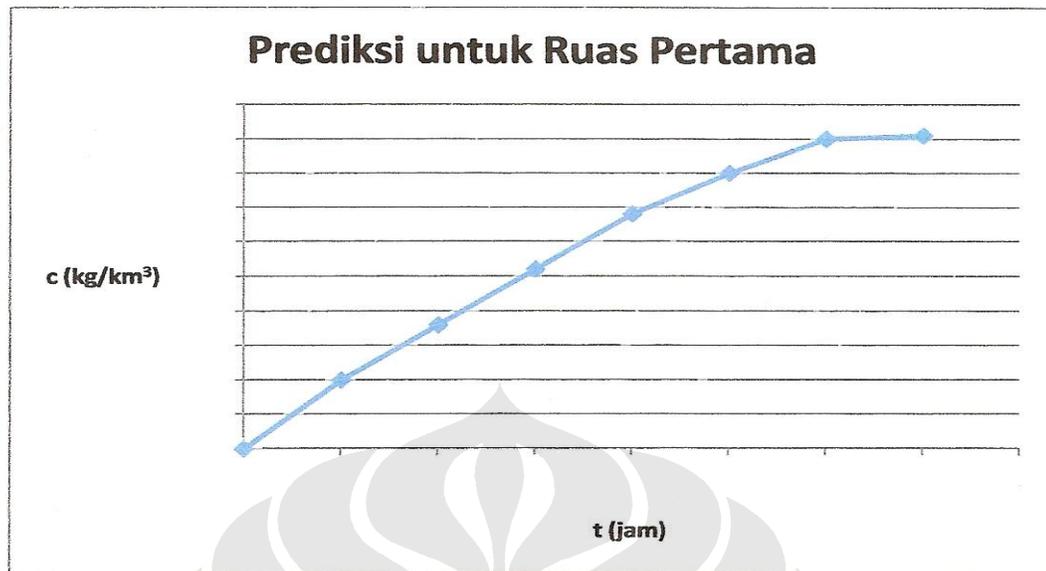
Tabel 4.4 Parameter simulasi beban non konstan

	Ruas 1	Ruas 2	Ruas 3	Ruas 4	Ruas 5
Δx (km)	10	10	10	10	10
A (km ²)	10	10	10	10	10
V (km ³)	100	100	100	100	100
W (kg/h)	e^t	0	0	0	0
W/V (kg/km ³ h)	$0.01e^t$	0	0	0	0
u (km/h)	8	8	8	8	8
D (km ² /h)	7	7	7	7	7
Δt (h)	1	1	1	1	1
Initial Condition				4	
Boundary Condition				4	

Prediksi awal akan hasil *running* simulasi dengan beban non konstan pada ruas sungai saat $t = 1$ jam seharusnya berbentuk grafik seperti yang terlihat pada Gambar 4.16 berikut, dimana nilai konsentrasi paling tinggi berada pada ruas pertama, yaitu pada lokasi diberikannya pembebanan dengan nilai yang terus bertambah seiring waktu. Kemudian berturut-turut, nilai konsentrasi tersebut menurun dengan signifikan pada ruas dua, lalu terus menurun dengan agak lambat pada ruas tiga. Pola penurunan nilai konsentrasi ini terus berlanjut semakin ke hilir hingga ruas empat dan ruas lima. Grafik ini memperlihatkan bahwa pada suatu waktu tertentu akan dicapai suatu keadaan dimana nilai konsentrasi pada semua ruas tidak lagi mengalami perubahan yang signifikan akibat perubahan waktu, atau dapat dikatakan menjadi stabil dan mendekati suatu kondisi yang *steady*.



Gambar 4.16 Grafik prediksi awal nilai konsentrasi pada semua ruas saat $t_1 = 1$ jam untuk beban non konstan



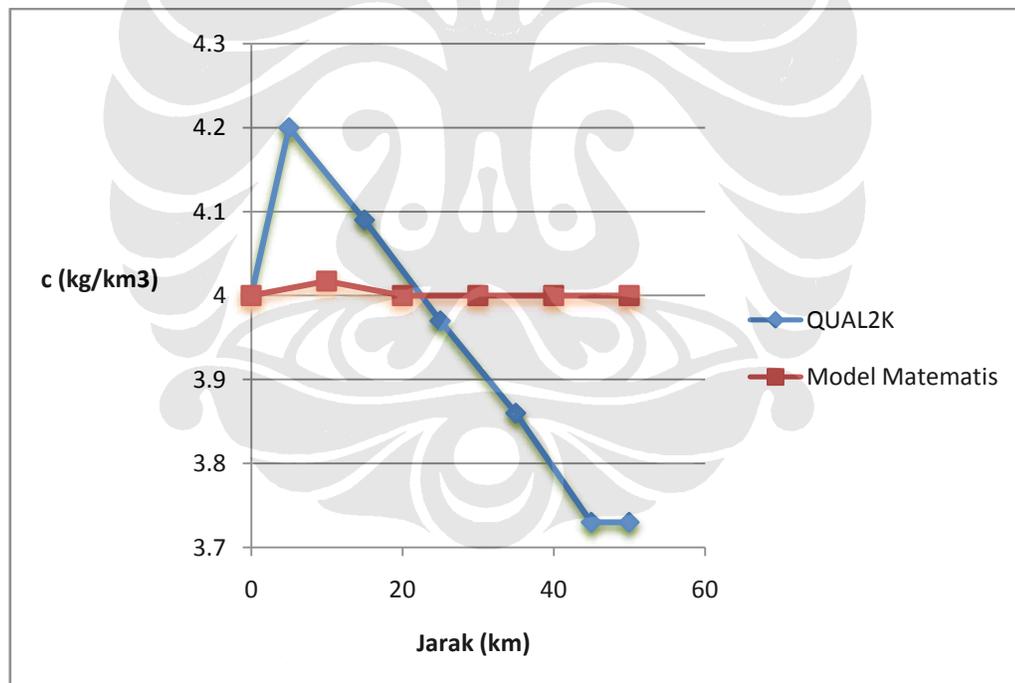
Gambar 4.17 Grafik prediksi awal nilai konsentrasi terhadap waktu pada ruas pertama untuk beban non konstan

Gambar 4.17 melukiskan nilai konsentrasi hanya pada ruas sungai pertama dari mulai saat $t_1 = 1$ jam hingga $t_7 = 7$ jam. Grafik pada gambar tersebut memperlihatkan pola nilai konsentrasi pada ruas pertama yang makin lama makin bertambah menuju suatu nilai tertentu seiring dengan pertambahan waktu. Hal ini masuk akal bila dilihat dari lokasi pembebanan dengan nilai beban yang terus bertambah, yang memang ditempatkan hanya pada ruas pertama. Kemudian, terus menerus seiring dengan pertambahan waktu yang makin panjang, pada suatu titik akan dicapai kondisi dimana perubahan nilai konsentrasi pada ruas tersebut tidaklah signifikan menurut waktu, sehingga dapat dikatakan bahwa ruas sungai yang bersangkutan telah mendekati kondisi yang stabil dan *steady*.

Output dari simulasi beban non konstan pada model adveksi-dispersi berupa grafik konsentrasi BOD terhadap jarak pada setiap satuan waktu, dimulai dari $t = 0$ hingga $t = 3$ jam. Hasil simulasi tersebut diperbandingkan dengan grafik keluaran QUAL2K dalam Gambar 4.18 dengan input nilai parameter yang sama untuk

menganalisa dan memvalidasi model numerik yang telah selesai dikembangkan, dengan catatan yang diperbandingkan adalah hasil simulasi model matematis pada saat $t = 1$ jam.

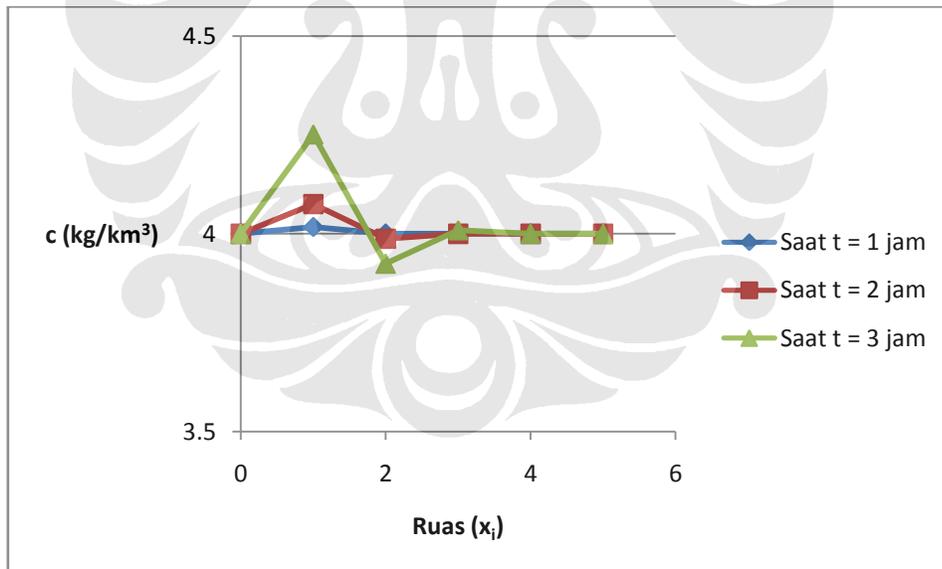
Hasil *running* pada QUAL2K dengan skenario pembebanan jenis non konstan memperlihatkan nilai konsentrasi relatif tinggi pada daerah hulu dibagian ruas tempat diberikan pembebanan dengan nilai berubah terhadap waktu, tetapi memiliki nilai dengan pola yang terus menurun di daerah hilir. *Trend* dari kurva hasil simulasi QUAL2K ini relatif mirip dengan pola kurva hasil simulasi pada prediksi awal, sehingga dapat disimpulkan bahwa nilai konsentrasi yang dihasilkan adalah logis dan dapat diandalkan.



Gambar 4.18 Hasil simulasi nilai konsentrasi terhadap jarak pada QUAL2K dan model matematis menggunakan beban non konstan

Hasil simulasi formulasi numerik dari model matematis menggunakan beban non konstan yang terdapat pada Gambar 4.18 memperlihatkan pola kurva berupa nilai konsentrasi puncak dengan nilai sekitar 4.02 pada jarak 10 km dari daerah hulu, dimana pembebanan diberikan. Kemudian dari jarak 20 km hingga jarak 50 km pada daerah hilir, nilai konsentrasi mencapai angka sebesar 4, dimana nilai tersebut sama dengan *initial condition* yang diberikan. Pola kurva milik model matematis tersebut tidak berbeda jauh dengan milik QUAL2K dan dengan prediksi awal, sehingga dapat dikatakan bahwa model matematis ini cukup valid dan dapat dihandalkan.

Gambar 4.19 merupakan grafik konsentrasi terhadap jarak menggunakan beban non konstan, dimulai dari $t = 1$ jam hingga $t = 3$ jam. Sumbu-x dari ketiga kurva pada gambar tersebut menyatakan jarak dalam bentuk ruas, sumbu-y menyatakan nilai konsentrasi.



Gambar 4.19 Grafik konsentrasi model matematis terhadap jarak berupa ruas menggunakan beban non konstan dengan berbagai selang waktu

Dari gambar diatas dapat dilihat bahwa pada sebagian ruas sungai yang berada pada daerah hilir, terdapat titik dengan besar konsentrasi yang bernilai minus. Pada Gambar 4.19, nilai konsentrasi pada ruas dua saat $t = 1$ jam bernilai sama dengan kondisi awal yang diberikan, yaitu sebesar 4. Sedangkan pada saat $t = 2$ jam, nilai konsentrasi pada ruas dua mendekati angka 3.99. Osilasi berlanjut hingga saat $t = 3$ jam dimana nilai konsentrasi pada ruas berkisar diantara 3.92. Semakin jauh ke hilir dan dengan bertambahnya waktu, besar osilasi yang terjadi akan semakin signifikan, sehingga pola kurva yang terbentuk tidak lagi dapat diandalkan dalam menyajikan nilai konsentrasi terhadap jarak. Peristiwa ini disebabkan karena terjadinya suatu *noise* akibat digunakannya pendekatan metode numerik untuk mencari besar konsentrasi di setiap titik, alih-alih menggunakan solusi eksak yang memberikan nilai dengan keakuratan tinggi pada setiap titik yang akan dihitung. Seperti yang pernah dibahas sebelumnya, osilasi menjadi salah satu kelemahan krusial yang dimiliki oleh metode numerik dalam memprediksi nilai konsentrasi dan dalam menyelesaikan pemodelan matematis. Kelemahan pada solusi numerik ini tidak akan pernah dapat benar-benar dihilangkan dengan total. Yang dapat dilakukan untuk membuatnya menjadi lebih *acceptable* adalah dengan meminimalisir besar osilasi hingga sekecil mungkin.

4.2.2.1 Pengujian sensitivitas model terhadap parameter Δt

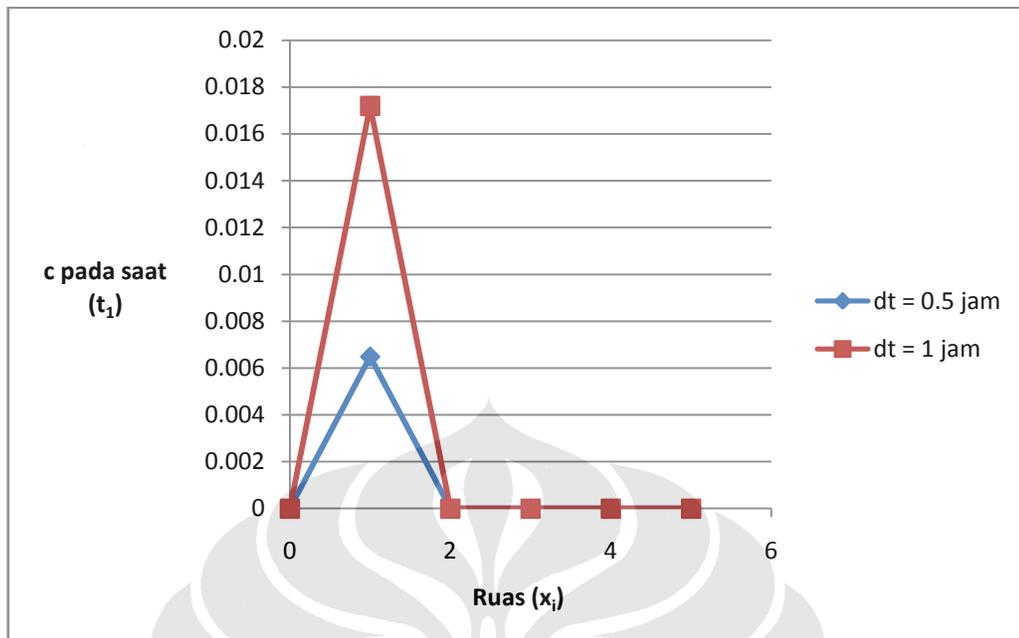
Cara lain dalam meminimalisir besar osilasi yang terjadi dalam formulasi numerik adalah dengan memperkecil nilai interval waktu Δt . Dipergunakan *setting* simulasi beban non konstan pada formulasi numerik dengan nilai parameter interval waktu diperkecil menjadi $\Delta t = 0.5$ jam.

Semua parameter dan data fisik yang dipakai dalam scenario simulasi memiliki detail yang ditabulasikan pada tabel berikut :

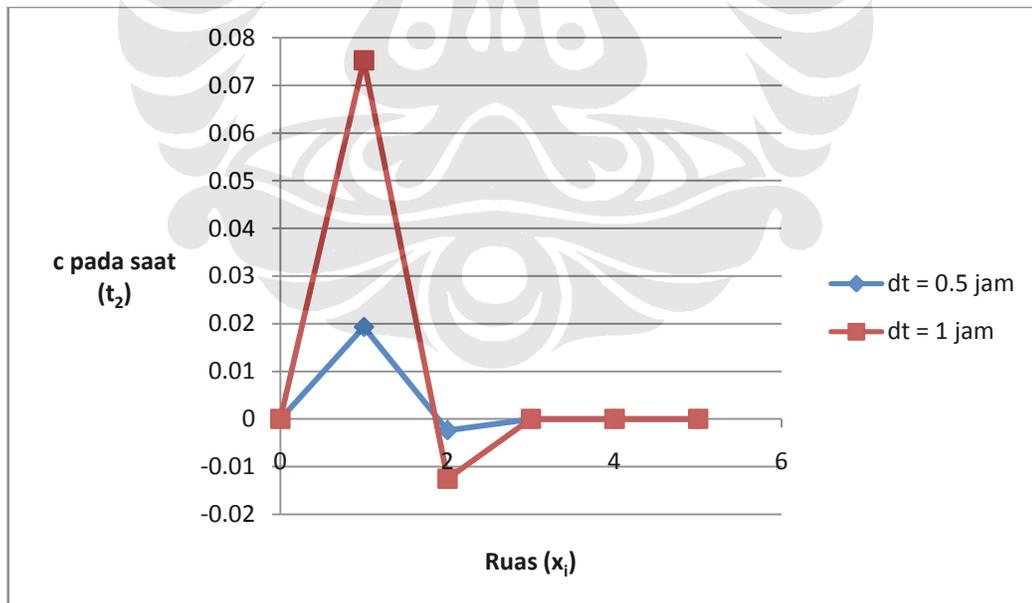
Tabel 4.5 Parameter simulasi beban non konstan dengan memperkecil Δt

	Ruas 1	Ruas 2	Ruas 3	Ruas 4	Ruas 5
Δx (km)	10	10	10	10	10
A (km ²)	10	10	10	10	10
V (km ³)	100	100	100	100	100
W (kg/h)	10	0	0	0	0
W/V (kg/km ³ h)	0.1	0	0	0	0
u (km/h)	8	8	8	8	8
D (km ² /h)	7	7	7	7	7
Δt (h)	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
Initial Condition (kg/km ³)	0				
Boundary Condition (kg/km ³)	0				

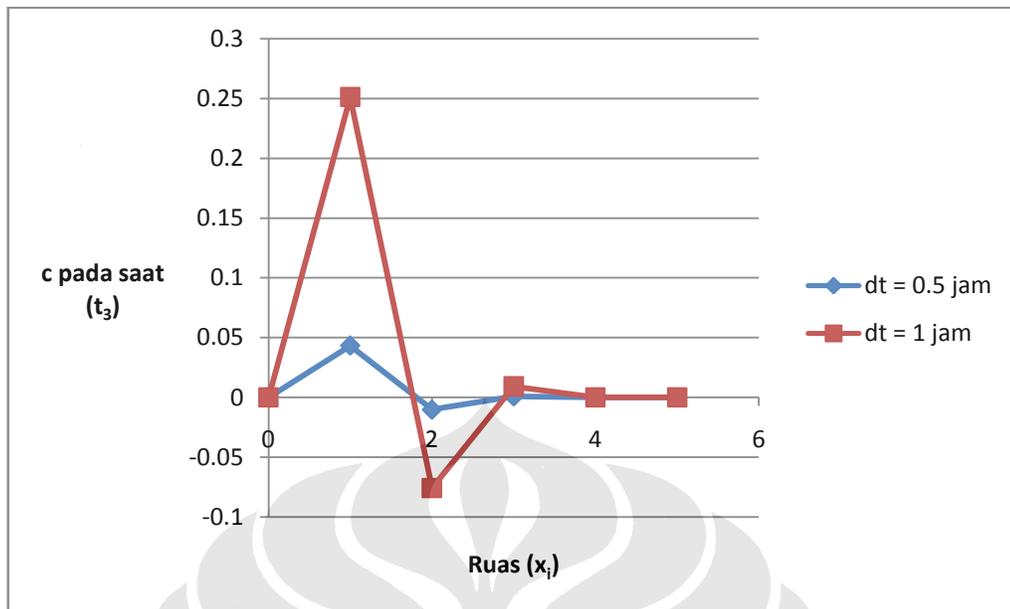
Hasil simulasi kemudian ditunjukkan pada Gambar 4.20, Gambar 4.21, dan Gambar 4.22. Gambar 4.20 menyatakan nilai konsentrasi pada semua ruas dengan dt diperkecil pada saat t_1 , Gambar 4.21 menyatakan nilai konsentrasi pada semua ruas dengan dt diperkecil pada saat t_2 , dan Gambar 4.22 menyatakan nilai konsentrasi pada semua ruas dengan dt diperkecil pada saat t_3 . Pada ketiga gambar tersebut, sumbu-x menyatakan jarak dalam bentuk ruas, sumbu-y menyatakan nilai konsentrasi.



Gambar 4.20 Grafik konsentrasi terhadap ruas pada saat t_1 dengan dt diperkecil menggunakan beban non konstan

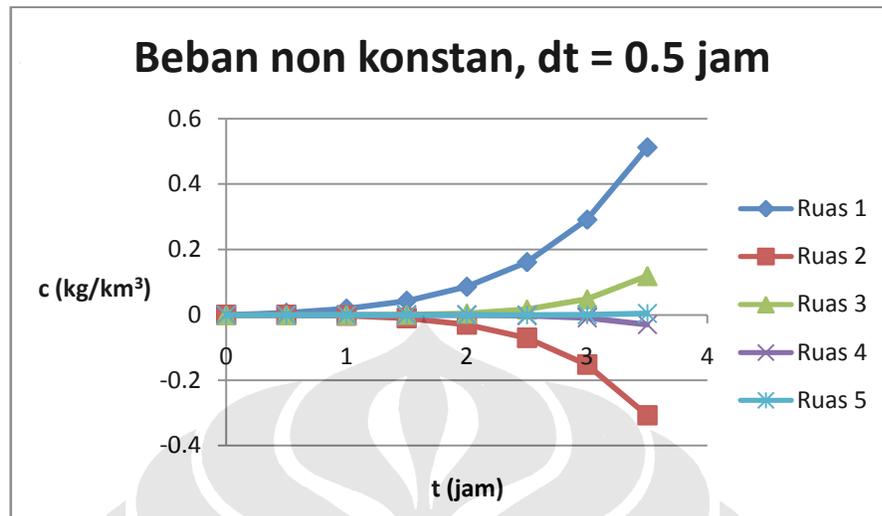


Gambar 4.21 Grafik konsentrasi terhadap ruas pada saat t_2 dengan dt diperkecil menggunakan beban non konstan



Gambar 4.22 Grafik konsentrasi terhadap ruas pada saat t_3 dengan dt diperkecil menggunakan beban non konstan

Dari Gambar 4.20, Gambar 4.21, dan Gambar 4.22 terlihat pola transportasi materi dalam ruas sungai yang bervariasi terhadap jarak dan waktu. Pada kurva yang ditinjau, ketika $t_1 = 0.5$ jam, nilai konsentrasi pada ruas dua sama dengan nol, pada saat yang bersamaan nilai konsentrasi pada ruas pertama mencapai puncak tertinggi akibat pembebanan yang diberikan pada saat $t = 0$. Nilai konsentrasi pada ruas dua berubah menjadi sekitar -0.002 pada saat $t_2 = 1$ jam. Akibat osilasi yang terus berlanjut, nilai konsentrasi pada ruas dua berubah menjadi sekitar -0.01 pada saat $t_3 = 1.5$ jam. Pada saat yang bersamaan mulai terlihat bahwa osilasi merambat menuju ruas sungai dihilir, yaitu ruas tiga, hanya saja pada ruas ketiga, nilai konsentrasi memiliki nilai positif dan berkisar pada angka 0.00086 . Secara garis besar, angka-angka berupa nilai konsentrasi pada ketiga kurva ini memperlihatkan nilai konsentrasi yang lebih kecil dibandingkan nilai konsentrasi pada saat penggunaan $\Delta t = 1$ jam, dimana hal ini membuktikan bahwa model bersifat sensitif terhadap parameter Δt dan osilasi dapat diperkecil dengan cara memperkecil nilai Δt .



Gambar 4.23 Grafik konsentrasi terhadap waktu pada semua ruas menggunakan beban non konstan dengan $dt = 0.5$ jam

Gambar 4.23 menunjukkan hasil simulasi dengan skenario beban non konstan dan $dt = 0.5$ jam. Pada gambar tersebut, sumbu-x menyatakan interval waktu dan sumbu-y menyatakan nilai konsentrasi, sedangkan masing-masing kurva mewakili nilai konsentrasi terhadap waktu pada tiap ruas sungai.

Dari Gambar 4.23 terlihat bagaimana konsentrasi pada ruas sungai pertama mula-mula bernilai nol, kemudian mulai naik seiring waktu dan mencapai nilai tertinggi sebesar 0.51 pada selang waktu terakhir, yaitu saat $t_7 = 3.5$ jam. Ruas kedua dan ruas keempat memiliki pola berlawanan dengan ruas satu, dimana pada waktu mula-mula keduanya bernilai nol, kemudian nilainya terus berkurang menurut waktu hingga mencapai nilai terendah dengan tanda negatif, yaitu sekitar -0.31 untuk ruas dua dan sekitar -0.03 untuk ruas empat pada selang waktu terakhir. Ruas ketiga dan kelima memiliki pola kurva yang tidak jauh berbeda dengan ruas pertama, yaitu bernilai nol pada waktu mula-mula, kemudian bertambah lambat laun menuju nilai tertingginya pada selang waktu terakhir, dengan kisaran nilai 0.12 untuk ruas tiga dan

kisaran nilai 0.0046 untuk ruas lima. Nilai konsentrasi bertanda negatif yang diperlihatkan oleh hasil simulasi pada ruas kedua dan keempat menandakan terjadinya osilasi yang diakibatkan ketidak-stabilan hasil formulasi numerik dalam penyelesaian model adveksi-dispersi, alih-alih menggunakan solusi eksak yang baku dan memiliki akurasi tinggi.

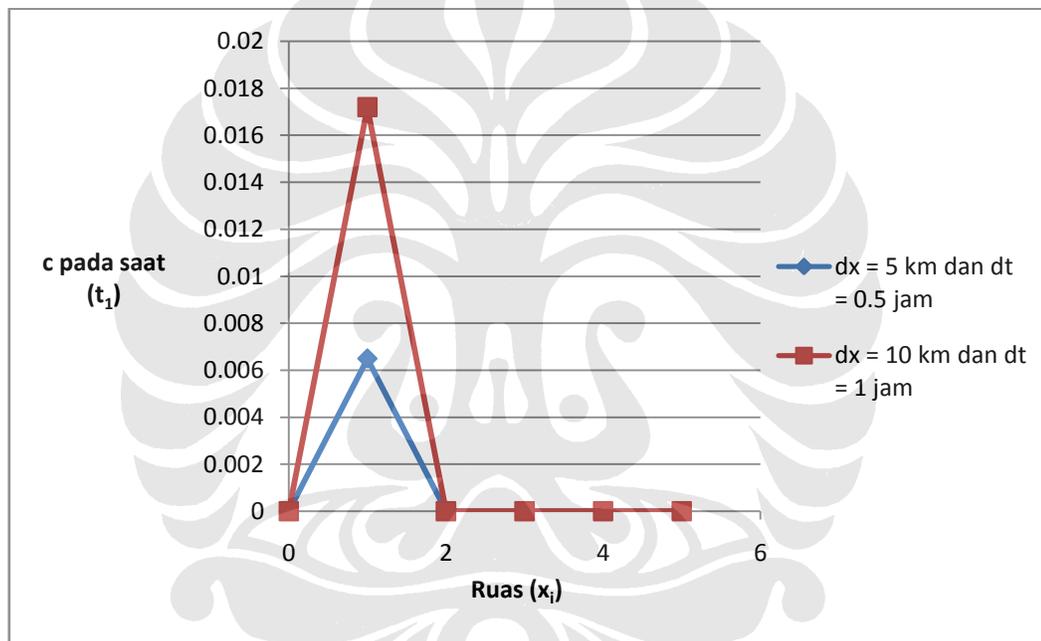
4.2.2.2 Pengujian sensitivitas model terhadap parameter Δx

Salah satu cara yang dapat digunakan dalam memperkecil besar osilasi yang terjadi pada formulasi numerik adalah dengan memperkecil nilai interval jarak Δx , dimana pemodel juga harus memperkecil besar Δt . Simulasi beban non konstan dengan nilai parameter interval jarak yang diperkecil menjadi $\Delta x = 5$ km dan nilai interval waktu yang diperkecil menjadi $\Delta t = 0.5$ jam. Semua parameter dan data fisik memiliki detail yang ditabulasikan pada tabel berikut :

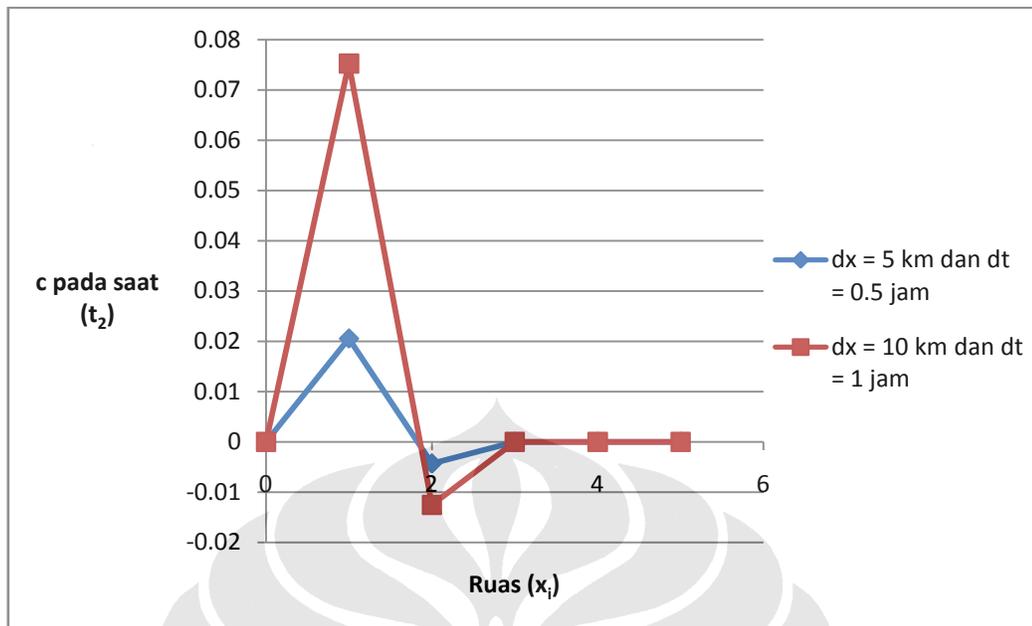
Tabel 4.6 Parameter simulasi beban non konstan dengan memperkecil Δx dan Δt

	Ruas 1	Ruas 2	Ruas 3	Ruas 4	Ruas 5
Δx (km)	5	5	5	5	5
A (km ²)	10	10	10	10	10
V (km ³)	100	100	100	100	100
W (kg/h)	10	0	0	0	0
W/V (kg/km ³ h)	0.1	0	0	0	0
u (km/h)	8	8	8	8	8
D (km ² /h)	7	7	7	7	7
Δt (h)	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
Initial Condition (kg/km ³)	0				
Boundary Condition (kg/km ³)	0				

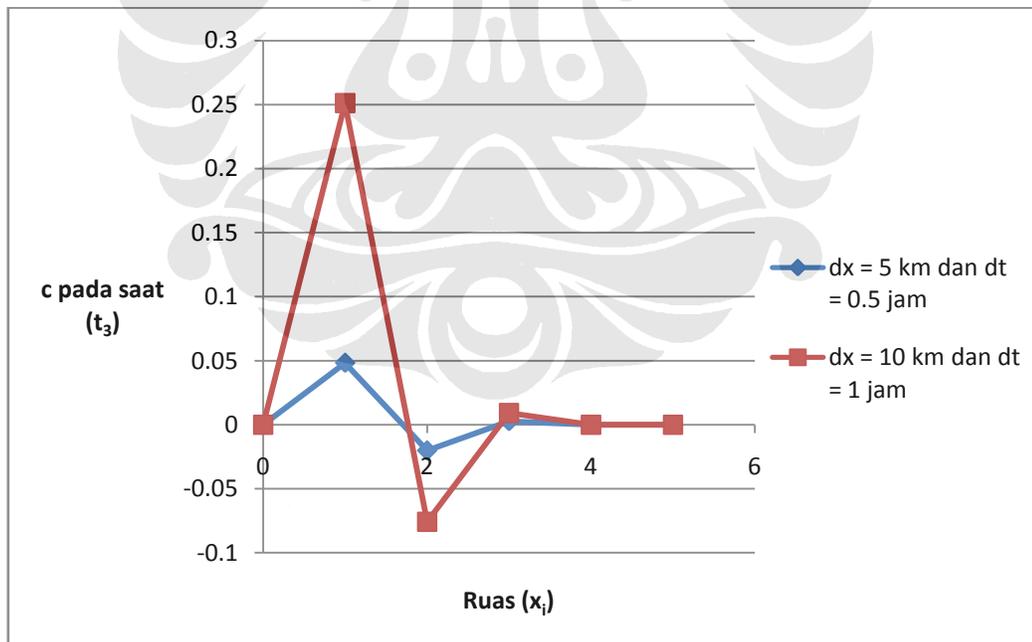
Hasi simulasi kemudian ditunjukkan pada Gambar 4.24, Gambar 4.25, dan Gambar 4.26. Gambar 4.24 menyatakan nilai konsentrasi pada semua ruas dengan nilai Δx dan Δt diperkecil pada saat t_1 , Gambar 4.25 menyatakan nilai konsentrasi pada semua ruas dengan nilai Δx dan Δt diperkecil pada saat t_2 , dan Gambar 4.26 menyatakan nilai konsentrasi pada semua ruas dengan nilai Δx dan Δt diperkecil pada saat t_3 . Pada ketiga gambar tersebut, sumbu-x menyatakan jarak dalam bentuk ruas, sumbu-y menyatakan nilai konsentrasi.



Gambar 4.24 Grafik konsentrasi terhadap ruas pada saat t_1 dengan Δx dan Δt diperkecil menggunakan beban non konstan

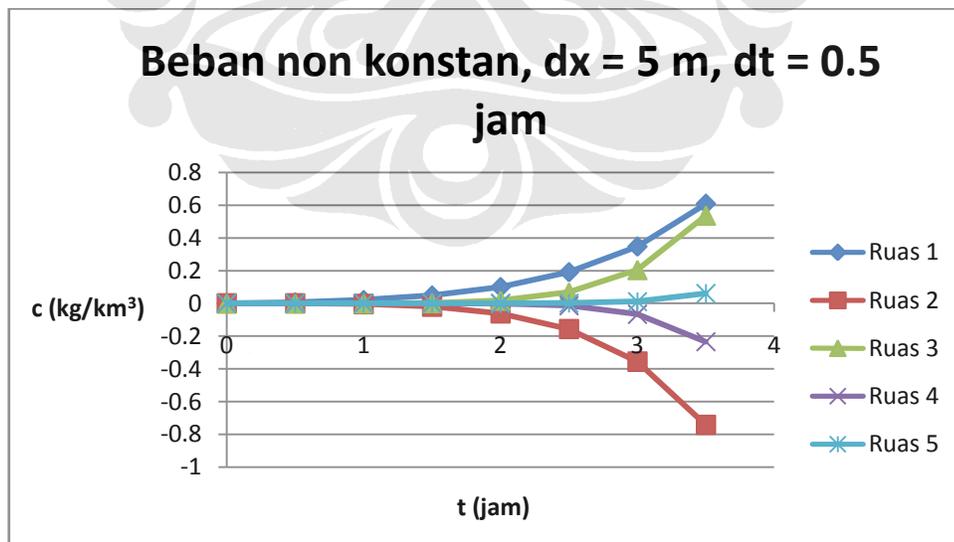


Gambar 4.25 Grafik konsentrasi terhadap ruas pada saat t_2 dengan dx dan dt diperkecil menggunakan beban non konstan



Gambar 4.26 Grafik konsentrasi terhadap ruas pada saat t_3 dengan dx dan dt diperkecil menggunakan beban non konstan

Dari Gambar 4.24, Gambar 4.25, dan Gambar 4.26 terlihat pola transportasi materi dalam ruas sungai yang bervariasi terhadap jarak dan waktu. Pada kurva yang ditinjau, dengan nilai $dx = 5$ km dan pada saat $t_1 = 0.5$ jam, nilai konsentrasi pada ruas dua masih sama dengan nol, pada saat yang bersamaan nilai konsentrasi pada ruas pertama mencapai puncak tertinggi akibat pembebanan yang diberikan pada saat $t = 0$. Nilai konsentrasi pada ruas dua berubah menjadi sekitar -0.004 pada saat $t_2 = 1$ jam. Osilasi yang semakin lama semakin besar mengakibatkan nilai konsentrasi pada ruas dua berubah menjadi sekitar -0.02 pada saat $t_3 = 1.5$ jam. Pada saat yang bersamaan mulai terlihat bahwa osilasi merambat pada ruas sungai dihilir, yaitu ruas tiga, hanya saja pada ruas ketiga, nilai konsentrasi memiliki nilai positif dan berkisar pada angka 0.0028 . Secara garis besar, angka-angka berupa nilai konsentrasi pada ketiga grafik memperlihatkan tingkat osilasi yang sedikit lebih kecil dibandingkan pada nilai konsentrasi ketika parameter $\Delta x = 10$ km dan $\Delta t = 1$ jam. Dapat disimpulkan model bersifat sensitif terhadap nilai parameter Δx dan Δt , dan bahwa penggunaan nilai parameter Δx dan Δt yang lebih kecil dapat mengurangi osilasi yang terjadi akibat penyelesaian model matematis menggunakan pendekatan numerik.



Gambar 4.27 Grafik konsentrasi terhadap waktu pada semua ruas menggunakan beban non konstan dengan $dx = 5$ km dan $dt = 0.5$ jam

Gambar 4.27 menunjukkan hasil simulasi dengan skenario beban non konstan dengan $dx = 5$ km dan $dt = 0.5$ jam. Pada gambar tersebut, sumbu-x menyatakan interval waktu dan sumbu-y menyatakan nilai konsentrasi, sedangkan masing-masing kurva mewakili nilai konsentrasi terhadap waktu pada tiap ruas sungai.

Dari Gambar 4.27 terlihat bagaimana konsentrasi pada ruas sungai pertama mula-mula bernilai nol, kemudian mulai naik dan mencapai nilai tertinggi sebesar 0.608 pada selang waktu terakhir, yaitu saat $t_7 = 3.5$ jam. Ruas kedua dan ruas keempat memiliki pola berlawanan dengan ruas satu, dimana pada waktu mula-mula keduanya bernilai nol, kemudian nilainya terus berkurang menurut waktu hingga mencapai nilai terendah, yaitu -0.74 untuk ruas dua dan sekitar -0.23 untuk ruas empat pada selang waktu terakhir. Ruas ketiga dan kelima memiliki pola kurva yang mirip dengan ruas pertama, yaitu bernilai nol pada waktu mula-mula, kemudian bertambah menuju nilai tertingginya pada selang waktu terakhir, dengan kisaran nilai 0.54 untuk ruas tiga dan kisaran nilai 0.06 untuk ruas lima. Hasil simulasi bertanda negatif pada ruas kedua dan keempat menandakan osilasi akibat ketidak-stabilan formulasi numerik yang dipergunakan dalam penyelesaian model matematis, alih-alih menggunakan solusi eksak yang baku dan memiliki akurasi tinggi.