

## **BAB 2**

# **PENGEMBANGAN MODEL MATEMATIS BERDASARKAN MEKANISME ADVEKSI DISPERSI DAN PAKET *SOFTWARE* QUAL2K**

### **2.1 TINJAUAN UMUM**

BOD merupakan suatu indikator umum untuk memberikan gambaran yang jelas mengenai jumlah polutan pencemar yang terkandung didalam suatu aliran pada ruas sungai. Konsentrasi BOD umumnya berbanding lurus dengan konsentrasi beragam polutan yang terkandung dalam aliran sungai yang ditinjau; maka makin tinggi konsentrasi BOD, makin tinggi pula tingkat pencemaran yang terjadi akibat beragam polutan terlarut maupun mikro-organisme didalam aliran sungai dan makin rendah pula tingkat kualitas air sungai.

Pada ruas sungai yang ditinjau, aliran fluida sebagai media BOD untuk dapat terlarut dan mengalir bersifat *1-dimensional* dimana vektor kecepatan hanya memiliki nilai dalam variabel sumbu x. Kecepatan aliran air bersifat *steady* sehingga kecepatan tidak berubah terhadap waktu. Secara umum, perubahan konsentrasi BOD terhadap waktu pada ruas sungai bergantung pada jenis mekanisme yang terjadi dalam aliran serta tipe dan besar *external loading* yang diberikan.

### **2.2 LANDASAN TEORI**

Untuk mendukung penelitian dalam tugas akhir, diperlukan identifikasi teori yang berkaitan dengan proses transportasi massa didalam saluran terbuka berupa aliran sungai. Landasan teori yang dipergunakan hanya terbatas pada dua mekanisme

umum yang diakomodir dalam mengembangkan model matematis. Kedua mekanisme tersebut akan dibahas satu-persatu secara spesifik dan mendetail.

### 2.2.1 Mekanisme Adveksi

Terdapat banyak tipe gerak angkutan materi air didalam badan-badan air alami. Energi angin dan gaya berat memberi gerakan pada air yang berujung pada proses *transport* massa. Konteks gerakan didalam sistem dapat dibagi menjadi dua kategori umum, yaitu adveksi dan difusi.

Adveksi dihasilkan oleh aliran yang bersifat *unidirectional* dan tidak mengubah identitas dari substansi yang sedang mengalir atau terpindahkan. Besar nilai *mass flux* ( $J$ ) suatu angkutan massa akibat adveksi secara matematis dituliskan sebagai berikut :

$$J = u.c \quad (2.1)$$

dimana :

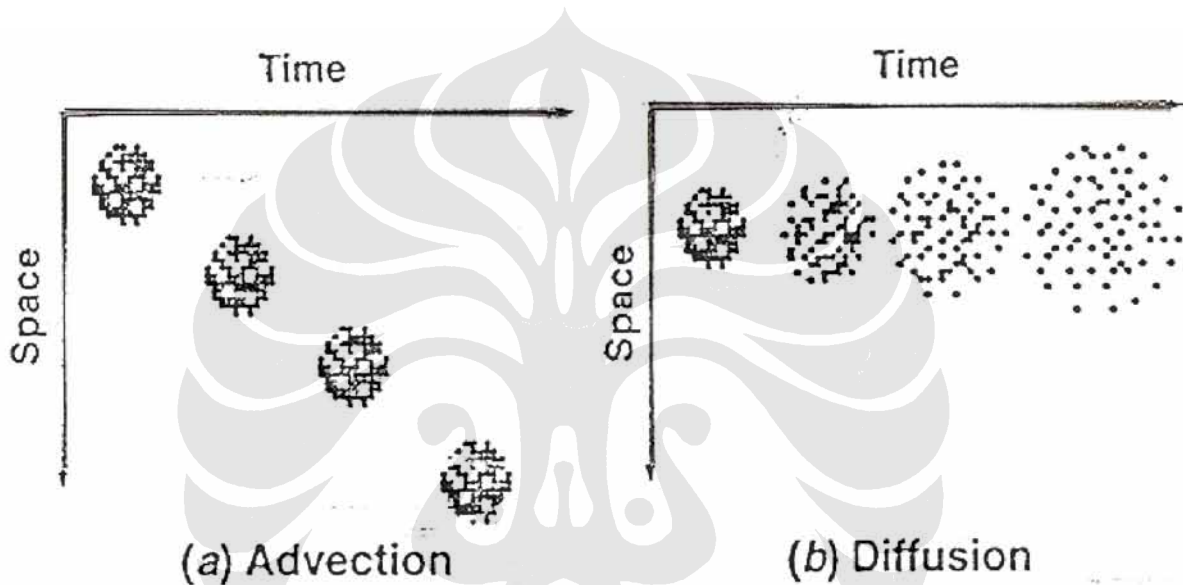
$J$  = mass flux dalam arah-x ( $ML^{-2}T^{-1}$ )

$u$  = besar kecepatan aliran dalam arah-x ( $LT^{-1}$ )

$c$  = besar konsentrasi debit *inflow* ( $ML^{-3}$ )

Pada Gambar 2.1(a), dapat terlihat bahwa adveksi menggerakkan suatu zat atau materi dari satu posisi ke posisi lain didalam ruang. Contoh sederhana transportasi secara primer dari tipe adveksi adalah aliran air melalui *outlet* danau dan transportasi hilir (*downstream transport*) akibat aliran didalam sebuah sungai atau *estuary*. Sedangkan difusi merujuk pada pergerakan massa akibat gerak acak dari molekul air (dikenal pula dengan nama Gerak Brown) atau akibat proses *mixing*. Contoh transportasi seperti ini yang menyebabkan materi berupa tinta pada Gambar 2.1(b) yang menyebar dan menipis terhadap waktu dengan pergerakan dari pusat

massa tinta yang dapat diabaikan. Pada skala mikroskopik, difusi molekuler dihasilkan dari gerak Brownian acak pada molekul air. Sejenis gerak acak yang mirip akan muncul pada skala yang lebih besar akibat pusaran arus (*eddies*) dan dikenal dengan nama difusi turbulen. Kedua jenis difusi tersebut memiliki kecenderungan untuk meminimalisir *gradient*, yaitu perbedaan konsentrasi, dengan memindahkan massa suatu materi dari daerah dengan konsentrasi yang tinggi ke daerah dengan konsentrasi yang rendah.



Gambar 2.1 Ilustrasi mekanisme adveksi dan difusi dalam aliran air

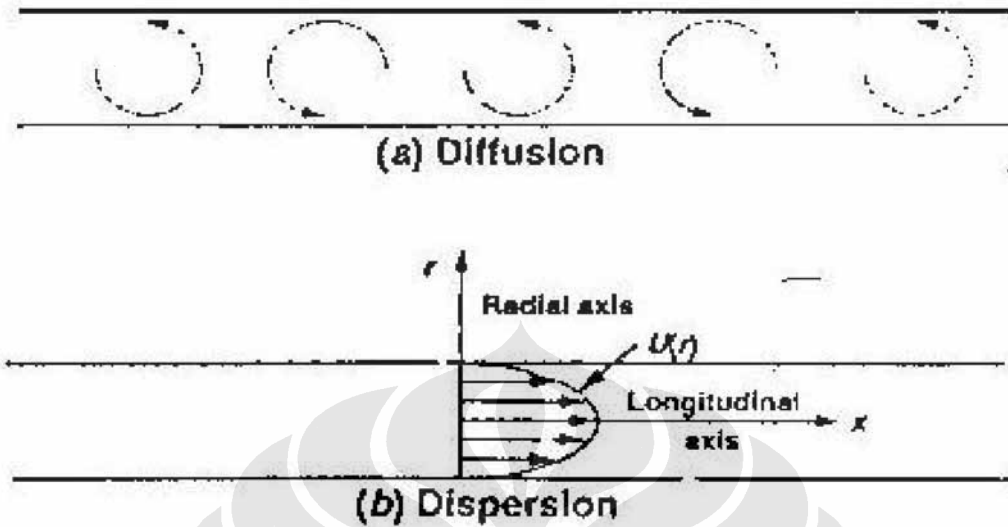
Pembagian jenis gerakan menjadi dua bentuk yang teridealisasikan dari adveksi dan difusi dipengaruhi oleh besarnya skala dari suatu fenomena yang sedang dimodelkan. Sebagai contoh, gerak air didalam sebuah *estuary* dapat dikategorikan secara primer bersifat advectif pada skala waktu pendek, karena pasang turunnya air menyebabkan air bergerak secara tak terarah menuju atau keluar dari *estuary*. Bila fokus masalah pemodelan adalah efek polusi bakterial dari peristiwa aliran air hujan jangka-pendek (*short-term stormwater overflow episode*), karakterisasi transportasi menjadi bentuk adveksi adalah hal yang mutlak. Dalam skala waktu yang lebih lama,

bagaimanapun, peristiwa pasang turun akan menggerakkan air bolak-balik didalam sebuah *trend* yang membentuk siklus dan gerak tersebut dapat secara primer diklasifikasikan sebagai difusi. Dalam banyak kasus, mekanisme *transport* dipertimbangkan sebagai kombinasi dari kedua jenis gerak, dengan penegasan bahwa penentuan tersebut bergantung pada skala permasalahan yang terjadi. (Chapra, *Surface Water-Quality Modelling*, 1997).

### 2.2.2 Mekanisme Dispersi

Dispersi merupakan salah satu mekanisme yang dapat menyebabkan polutan atau suatu materi tertentu menyebar didalam air. Hanya saja, berbeda dengan difusi yang merupakan gerak acak molekul air, dispersi merupakan produk dari terbentuknya perbedaan kecepatan didalam dimensi ruang. Hal ini dapat lebih mudah dimengerti dengan mengambil contoh tinta yang diteteskan pada aliran air yang mengalir dalam suatu pipa, seperti pada Gambar 2.2. Pada kasus tersebut, molekul tinta didekat dinding pipa akan berjalan lebih lambat dibandingkan dengan molekul tinta yang berada tepat ditengah pusat aliran dalam pipa, akibat profil kecepatan aliran yang berbentuk parabolik atau akibat gaya geser pada dinding pipa. Efek dari perbedaan kecepatan aliran terhadap dimensi ruang inilah yang menyebabkan tinta atau suatu materi terlarut akan tersebar atau tercampur disepanjang sumbu yang sejajar arah aliran. Fenomena dispersi ini, dengan pemberian dimensi waktu yang mencukupi, dapat direpresentasikan dalam bentuk proses difusi Fickian.

Difusi Fickian, atau yang umum dikenal dengan Hukum Fick pertama, adalah pernyataan yang menghubungkan antara mass flux dan gradient konsentrasi. (Hugo Fischer, John List, Robert Koh, Jorg Imberger, and Norman Brooks, *Mixing in Inland and Coastal Waters*, 1979).



Gambar 2.2 Perbedaan konsep dasar antara difusi dan dispersi

Difusi Fickian dapat dituliskan secara matematis dalam bentuk sebagaimana yang tertulis berikut :

$$J = -D \frac{dc}{dx} \quad (2.2)$$

dimana :

$J$  = *Mass flux* dalam arah-x ( $ML^{-2}T^{-1}$ )

$D$  = Koefisien Difusi ( $L^2T^{-1}$ )

Persamaan (2.2) merupakan perumusan Hukum Fick pertama yang menyatakan bahwa *mass flux* akibat difusi berbanding lurus atau proporsional terhadap *gradient* konsentrasi, yaitu turunan konsentrasi terhadap jarak. Seperti yang tertulis pada persamaan diatas, tanda negatif dimasukkan untuk memastikan bahwa *mass flux* berpindah dalam arah yang benar, yaitu dari daerah dengan konsentrasi tinggi menuju daerah dengan konsentrasi lebih rendah.

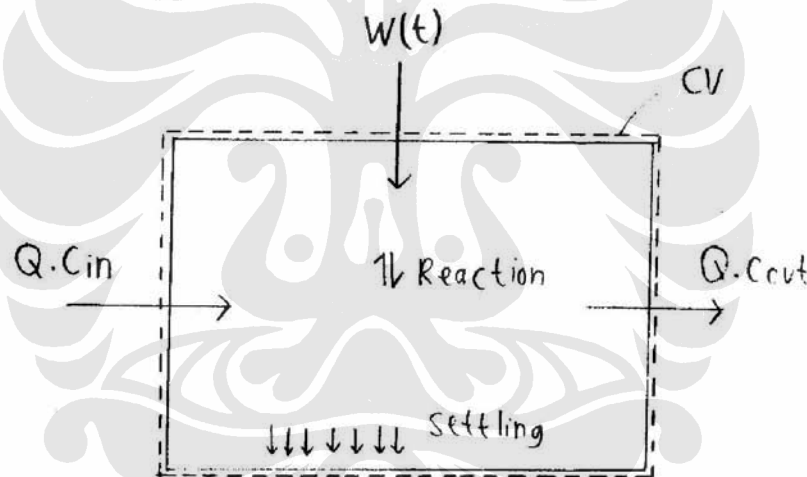
### 2.3 PENURUNAN PERSAMAAN MASS BALANCE

Untuk aliran system berupa BOD pada suatu *control volume* dengan sifat aliran *1-dimensional* dan *unsteady* (besar  $dc/dt$  BOD didalam *control volume* tidak sama dengan nol), berlaku hukum kekekalan massa sebagai berikut :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{cv}} \rho dV + \int_{A_{cv}} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{dm}{dt} + \int_{A_{cv}} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = 0 \quad (2.4)$$

(Potter and Wiggert, *Mechanics of Fluids*, 1997)



Gambar 2.3 Mekanisme transportasi materi yang terjadi dalam *control volume* pada suatu ruas sungai

Untuk persamaan *mass balance* dari BOD pada suatu aliran sungai, bentuk hukum kekekalan massa secara lebih lanjut dapat dijabarkan sebagai berikut :

$$Accumulation - Loading + Outflow + Reaction + Settling = 0 \quad (2.5)$$

$$Accumulation = Loading - Outflow - Reaction - Settling \quad (2.6)$$

Persamaan diatas, untuk suatu *control volume* dengan detail dimensi yang diketahui, dapat ditulis secara matematis sebagai berikut :

$$\frac{dm}{dt} = W(t) + Q.c_{in} - Q.c_{out} - k.c - v_s.A_s.c \quad (2.7)$$

dimana  $m = V.c$  , sehingga :

$$\frac{d(V.c)}{dt} = W(t) + Q.c_{in} - Q.c_{out} - k.c - v_s.A_s.c \quad (2.8)$$

Karena  $V$  yang dimaksud adalah volume sistem yang memenuhi ruang *control volume*, yang besarnya sama dengan volume dari *control volume* itu sendiri, maka nilai  $V$  bersifat konstan sehingga persamaan diatas dapat dituliskan menjadi :

$$V \frac{dc}{dt} = W(t) + Q.c_{in} - Q.c_{out} - k.c - v_s.A_s.c \quad (2.9)$$

*Mass flux* terlarut dalam arah sumbu  $x$  yang diangkut melalui dua mekanisme pembawa, yaitu adveksi dan dispersi seperti yang telah dijelaskan sebelumnya diatas, dapat dikuantifikasikan sebagai berikut :

$$\text{Transportasi } mass \text{ flux dengan adveksi} : u.c \quad (2.10a)$$

$$\text{Transportasi } mass \text{ flux dengan dispersi} : -D \frac{\partial c}{\partial x} \quad (2.10b)$$

Dimana  $D$  merupakan koefisien dispersi dalam arah sumbu  $x$ .

Mekanisme reaksi dan *settling* diasumsikan memiliki nilai sangat kecil hingga dapat diabaikan, dan kemudian dapat dihilangkan dari persamaan. Kalikan kedua ruas pada persamaan (2.7) dengan faktor  $1/V$ , sehingga persamaan menjadi :

$$\frac{dc}{dt} = \frac{W(t)}{V} + \frac{Q.c_{in}}{V} - \frac{Q.c_{out}}{V} \quad (2.11)$$

Suku ( $Q_{in} / V$ ) dan ( $Q_{out} / V$ ) masing-masing merupakan *inflow* dan *outflow* yang mempertimbangkan mekanisme adveksi dan dispersi. Semua suku dalam *mass balance* diarahkan menjadi bentuk *mass flux* dengan dimensi  $[M/L^2T]$ , sehingga suku dari *inflow* dan *outflow* masing-masing harus dikalikan terlebih dahulu dengan faktor  $dx$ , yang membentuk persamaan :

$$\frac{Q.c_{in}}{V}dx = uc + \left( -D.\frac{\partial c}{\partial x} \right) = uc - D.\frac{\partial c}{\partial x} \quad (2.12)$$

$$\frac{Q.c_{out}}{V}dx = \left[ uc + \frac{\partial(uc)}{\partial x}dx \right] - \left[ D.\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( D.\frac{\partial c}{\partial x} \right) dx \right] \quad (2.13)$$

Faktor  $dx$  merupakan panjang *control volume* dalam arah sumbu x, atau dapat disebut juga dengan interval jarak antara satu *control volume* dengan *control volume* lainnya, sehingga *mass balance* suatu materi terlarut pada dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\frac{\partial c}{\partial t}dx = \frac{W(t)}{V}dx + \left[ (uc) - \left( D.\frac{\partial c}{\partial x} \right) \right] - \left[ \left( uc + \frac{\partial(uc)}{\partial x}dx \right) - \left( D.\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( D.\frac{\partial c}{\partial x} \right) dx \right) \right] \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t}dx = \frac{W(t)}{V}dx - \frac{\partial(uc)}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial x} \left( D.\frac{\partial c}{\partial x} \right) dx \quad (2.15)$$

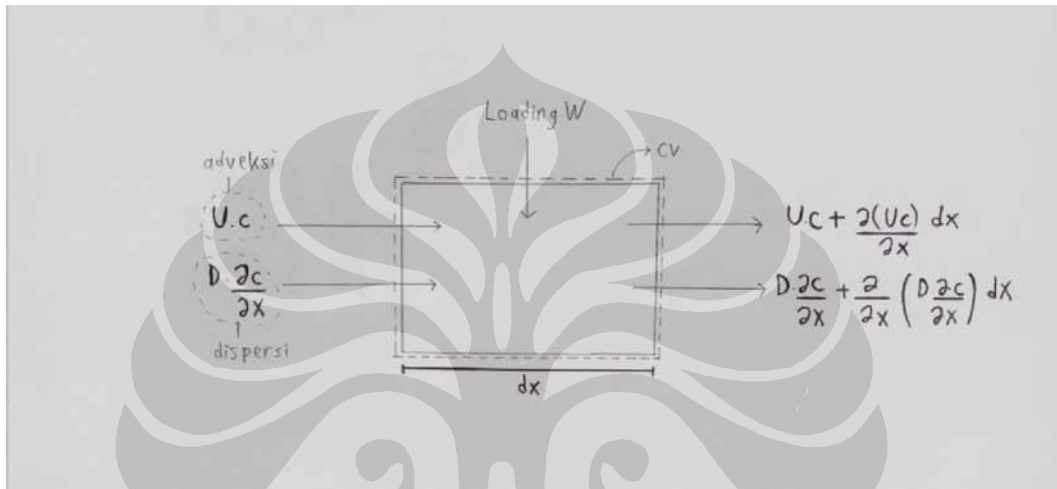
Karena kedua ruas memiliki faktor panjang  $dx$ , maka faktor tersebut dapat diabaikan sehingga persamaan diatas menjadi :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{W(t)}{V} - \frac{\partial(uc)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( D.\frac{\partial c}{\partial x} \right) \quad (2.16)$$



Parameter kecepatan ( $u$ ) dan nilai koefisien dispersi ( $D$ ) adalah besaran yang konstan sehingga dapat dikeluarkan dari tanda kurung, maka persamaan tersebut dapat disederhanakan untuk mempermudah penyelesaian menjadi bentuk sebagai berikut :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{W(t)}{V} - u \frac{\partial c}{\partial x} + D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad (2.17)$$



Gambar 2.4 Kuantitas adveksi maupun dispersi yang keluar dan masuk melalui penampang *control volume*

Besar suku *settling*, yang umum diekspresikan dengan bentuk ( $Vs.c.As$ ), dalam kalkulasi lebih lanjut akan seterusnya diabaikan karena BOD pada ruas sungai diasumsikan tidak dapat mengalami *settling* maupun peluruhan. Sedangkan suku reaksi ( $k.c$ ) tidak pula diperhitungkan karena BOD diasumsikan tidak mengalami reaksi dengan material apapun dalam suatu ruas sungai.

Persamaan yang diturunkan secara teoritis dari hukum kekekalan massa menjadi bentuk persamaan (2.17) inilah yang disebut sebagai model adveksi-dispersi. Model dengan bentuk persamaan differensial parsial tersebut merupakan persamaan matematis yang akan diselesaikan dengan pendekatan numerik pada pembahasan lebih lanjut.

## 2.3 PAKET SOFTWARE QUAL2K

Formulasi numerik dari model adveksi-dispersi harus dicek tingkat keandalannya dengan cara melakukan validasi melalui perbandingan antara hasil *running* formulasi numerik dengan hasil *running* simulasi pada *software* yang telah lebih mapan. Dalam tugas akhir ini, *software* yang dipilih adalah QUAL2K.

### 2.3.1 Karakteristik QUAL2K

QUAL2K adalah model kualitas arus air dan sungai yang dibuat dengan tujuan merepresentasikan versi modern dari model QUAL2E (Brown and Barnwell). Karakteristik QUAL2K sama dengan yang ada pada QUAL2E dalam beberapa aspek berikut :

1. Model QUAL2K merupakan model bersifat satu dimensi. *Channel* bersifat *well-mixed*, baik vertikal dan lateral.
2. Model QUAL2K dapat mengakomodasi jenis sungai yang memiliki *branching* (percabangan). Sistem terdiri dari sungai utama dengan percabangan anak-anak sungai.
3. Model memiliki karakteristik *steady-state hydraulics*. Aliran air yang disimulasikan bersifat *non-uniform* dan *steady-state*, dimana kecepatan aliran tetap terhadap waktu.

Kerangka kerja QUAL2K meliputi elemen-elemen baru, antara lain dapat dijelaskan sebagai berikut :

- a. *Software Environment and Interface*. Q2K diimplementasikan dalam lingkungan Microsoft Windows. Komputasi numerik diprogram dalam Fortran 90. Excel digunakan sebagai *graphical user interface*. Semua operasi *interface* terprogram dalam bahasa makro Microsoft Office : Visual Basic for Applications atau VBA.

- b. Segmentasi model. Q2E membagi sistem menjadi sungai yang tersegmentasi sebagai elemen-elemen yang sama besar. Q2K juga membagi sistem menjadi *reaches* dan *elements*. Hanya saja, berkebalikan dari Q2E, ukuran elemen untuk Q2K dapat bervariasi dari satu ke yang lain. Sebagai tambahan, *multiple loadings* (pembebanan jamak) dan *withdrawals* dapat di-input untuk elemen yang manapun.

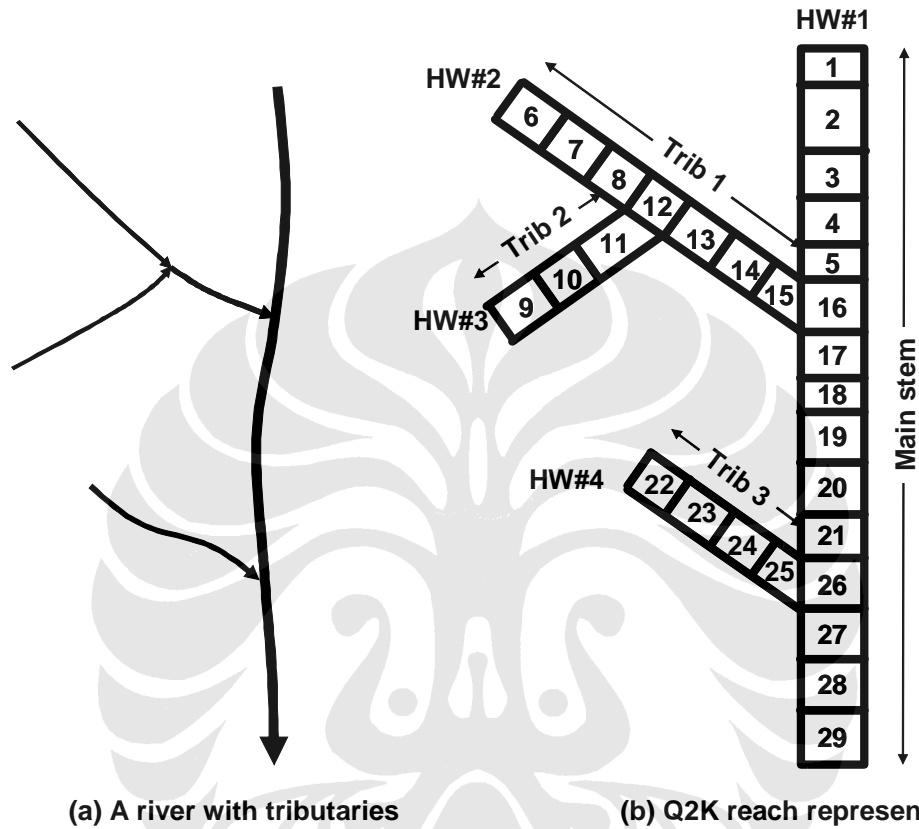
Dari penurunan persamaan dasar, yaitu hukum kekekalan massa, hingga diperoleh persamaan *mass balance* yang berlaku untuk kedua model numerik, maka mekanisme yang diperhatikan pada model QUAL2K hanya berupa *inflow*, *loading* dan *outflow*. Diasumsikan tidak terjadi reaksi kimia pada BOD dalam bentuk apapun, sehingga mekanisme reaksi dianggap tidak memberikan kontribusi dalam perubahan konsentrasi BOD terhadap waktu. Peluruhan ataupun *settling* pada BOD diasumsikan tidak terjadi sehingga mekanisme inipun akan dapat diabaikan dalam proses simulasi numerik melalui program QUAL2K untuk menghitung nilai konsentrasi BOD terhadap jarak dan waktu.

### 2.3.2 Segmentasi QUAL2K

QUAL2K merepresentasikan sungai sebagai susunan dari beberapa *reaches*. Susunan ini mewakili setiap bagian dari sungai yang memiliki karakteristik hidrolika yang konstan, seperti misalnya *slope*, dan lebar dasar sungai.

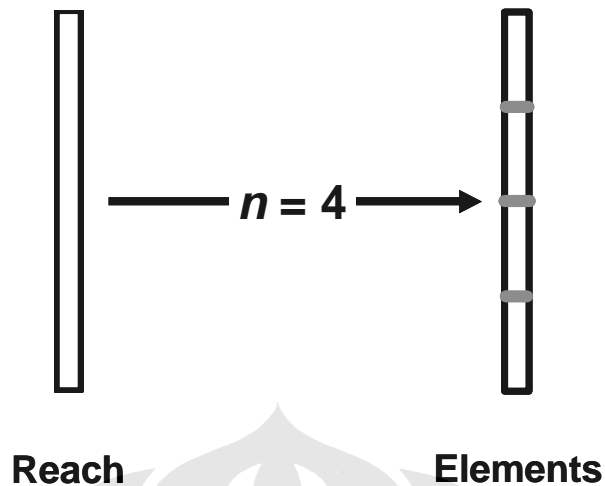
Untuk sistem yang memiliki *tributaries* (anak-anak sungai), *reaches* dinomorkan berurutan dimulai dari *reach* 1 pada *headwater* dari sungai utama. Ketika pertemuan dengan sebuah anak sungai dicapai, maka penomoran berlanjut ke *headwater* dari anak sungai. Baik *headwater* dan *tributaries* selalu dinomorkan secara konsekutif mengikuti pola yang mirip dengan penomoran pada *reaches*. Percabangan mayor pada sistem (yaitu, *main stem* dan setiap *tributaries*) selalu diidentifikasi sebagai segmen. Perbedaan ini memiliki kepentingan praktikal,

karena *software* menyediakan plot dari *output* model berdasarkan basis segmen. Dan, *software* menghasilkan plot individu untuk *main stem* (aliran sungai utama) sebagaimana pula pada setiap *tributaries*.



Gambar 2.5 Skema segmentasi untuk sungai dengan percabangan pada *software* QUAL2K

Setiap model dari suatu *reach* secara lebih lanjut dapat dibagi menjadi susunan dari elemen-elemen dengan interval jarak sama besar. Pada gambar dibawah, hal ini dilakukan dengan melakukan identifikasi jumlah elemen yang diinginkan. Setiap elemen pada model QUAL2K dapat dianggap mewakili satu *control volume*.



Gambar 2.6 Ilustrasi pembagian sebuah *reach* yang dibagi menjadi  $n$ -elemen sama panjang

Secara ringkas, *nomenclature* yang digunakan untuk memperjelas metode dimana QUAL2K mengorganisir topologi sungai, antara lain sebagai berikut :

1. *Reach*, yaitu panjang sungai dengan karakteristik hidrolika yang konstan.
2. Elemen, yaitu unit komputasi fundamental model yang terdiri dari subdivisi dengan panjang yang ekuivalen dari sebuah *reach*.
3. Segmen, yaitu kumpulan beberapa *reach* yang merepresentasikan sebuah cabang dari sistem. Segmen terdiri dari *main stem* dan juga setiap *tributaries* yang ada.
4. *Headwater*, yaitu batas atas dari sebuah segmen model.