

BAB 3

PENYELESAIAN NUMERIK MODEL ADVEKSI-DISPERSI DENGAN IMPLEMENTASI *SPREADSHEET*

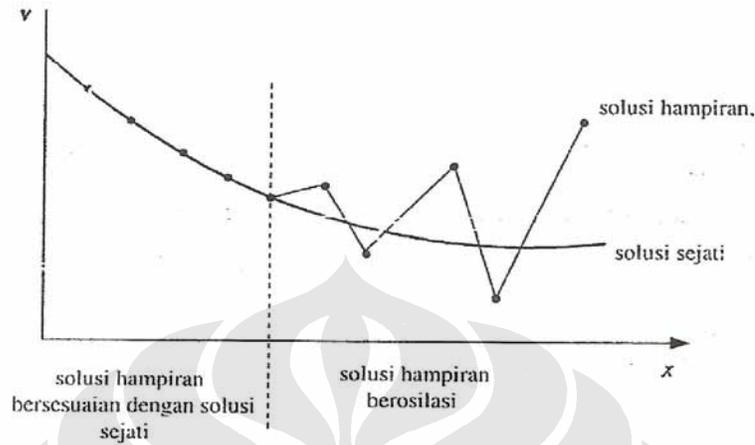
3.1 MENGENAI METODE NUMERIK

Persoalan yang melibatkan model matematika banyak muncul dalam berbagai ilmu pengetahuan, seperti halnya dalam kasus pemodelan kualitas air. Seringkali model matematika tersebut muncul dalam bentuk dengan tingkat kerumitan tinggi. Model matematika yang rumit ini kadangkala tidak dapat diselesaikan dengan metode analitik yang sudah umum untuk mendapatkan solusi eksaknya. Yang dimaksud dengan metode analitik adalah metode penyelesaian model matematika dengan rumus-rumus aljabar yang sudah baku.

Metode analitik hanya unggul untuk sejumlah persoalan yang terbatas, yaitu persoalan yang memiliki tafsiran geometri sederhana dan berorder rendah (order yang dimaksud adalah turunan paling tinggi dalam model matematis yang bersangkutan). Padahal pemodelan yang muncul dalam dunia nyata, seperti misalnya dalam pemodelan kualitas air, seringkali bersifat non-linier serta melibatkan bentuk dan proses penyelesaian yang rumit. Akibatnya nilai praktis penyelesaian metode analitis kadangkala menjadi terbatas hanya pada pemodelan matematis yang sederhana.

Dalam kasus dimana metode analitik tidak dapat lagi diterapkan, maka solusi pemodelan masih dapat diketahui dengan menggunakan metode numerik. Metode numerik adalah teknik yang digunakan untuk memformulasikan persoalan matematis sehingga dapat dipecahkan dengan operasi aritmatika biasa, seperti penambahan, pengurangan, perkalian dan pembagian. Metode berarti cara, sedangkan numerik

berarti angka, sehingga metode numerik secara harfiah dapat diartikan sebagai perhitungan dengan menggunakan angka-angka.



Gambar 3.1 Contoh osilasi pada pemodelan matematis dengan penyelesaian menggunakan metode numerik

Perbedaan utama antara metode numerik dengan metode analitik terletak pada dua hal. Pertama, solusi dengan menggunakan metode numerik selalu berbentuk angka. Bandingkan dengan solusi analitik yang umumnya menghasilkan solusi dalam bentuk fungsi matematis yang selanjutnya fungsi tersebut dapat dievaluasi untuk menghasilkan nilai dalam bentuk angka. Kedua, dengan metode numerik, pemodel hanya hanya memperoleh solusi yang menghampiri atau mendekati solusi eksak sehingga solusi numerik dinamakan pula solusi hampiran (*approximation*) atau solusi pendekatan. Hanya saja, solusi numerik dapat dibuat seteliti yang diinginkan oleh pemodel. Solusi hampiran jelas tidak memberikan hasil yang tepat sama dengan solusi eksak, sehingga terdapat selisih diantara keduanya. Selisih ini disebut galat atau *error*. Pemodel dapat memperkecil besar galat dengan beragam cara, antara lain dengan menggunakan jenis metode numerik yang lebih kompleks dan memanfaatkan parameter komputasi yang lebih kecil, seperti misalnya parameter berupa interval jarak dan interval waktu. (Rinaldi Munir, *Metode Numerik Edisi Revisi*, 2006).

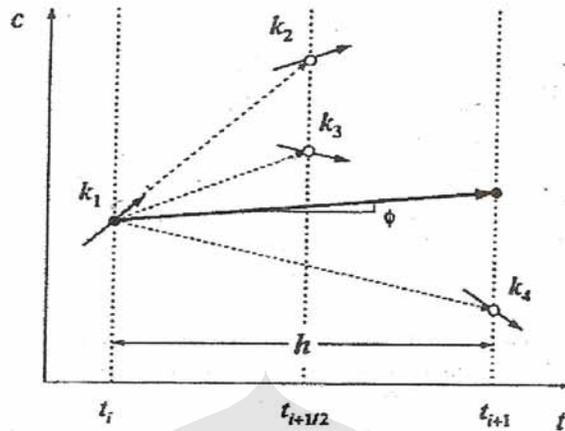
3.1.1 Metode Runge-Kutta 4th order

Metode Runge-Kutta adalah alternatif solusi lain dari metode deret Taylor yang tidak membutuhkan perhitungan turunan. Metode ini mengusahakan derajat ketelitian yang lebih tinggi, dan sekaligus menghindarkan kebutuhan mencari turunan yang lebih tinggi dengan jalan mengevaluasi fungsi $f(x,y)$. Dalam tugas akhir ini, lebih familiar dengan suatu bentuk $f(c,t)$ pada titik terpilih dalam setiap selang langkah atau *step size*. Metode Runge-Kutta adalah metode numerik yang cukup populer karena banyak dipergunakan dalam praktek.

Berdasarkan ketinggian order, metode Runge-Kutta dapat dibagi menjadi :

1. Runge-Kutta order 1
2. Runge-Kutta order 2
3. Runge-Kutta order 3
4. Runge-Kutta order 4
5. Runge-Kutta order n

Yang termasuk kedalam metode Runge-Kutta order satu adalah metode Euler. Sedangkan salah satu contoh metode Runge-Kutta order dua adalah metode Heun. Metode Runge-Kutta yang umum dan banyak dipakai adalah metode Runge-Kutta order tiga dan metode Runge-Kutta order empat. Kedua metode tersebut banyak dipakai karena tingkat ketelitian dari solusinya tinggi bila dibandingkan dengan metode Runge-Kutta order sebelumnya, mudah diprogram, dan memberikan hasil yang relatif stabil. Metode Runge-Kutta dengan order ke-n yang lebih tinggi tentu memberikan hasil yang semakin teliti, hanya saja ketelitian ini harus ditukar dengan jumlah komputasi yang semakin banyak. Maka itu, metode Runge-Kutta order empat telah dianggap cukup baik dan memadai untuk menyelesaikan suatu masalah pemodelan dalam bentuk persamaan diferensial terkait.



Gambar 3.2 Graphical depiction of Runge-Kutta 4th order

Untuk suatu fungsi $f(c,t)$ yang memiliki nilai awal dan terdefinisi pada suatu selang tertutup, perumusan yang baku dalam metode Runge-Kutta order empat dapat diekspresikan sebagai berikut:

$$c^{j+1} = c^j + \frac{1}{6}[(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)] \quad (3.1)$$

Dengan :

$$\begin{aligned} k_1 &= \Delta t \cdot f(t_{j-1}, c^{t_{j-1}}) \\ k_2 &= \Delta t \cdot f(t_{j-1} + \frac{1}{2} \Delta t, c^{t_{j-1}} + \frac{1}{2} k_1) \\ k_3 &= \Delta t \cdot f(t_{j-1} + \frac{1}{2} \Delta t, c^{t_{j-1}} + \frac{1}{2} k_2) \\ k_4 &= \Delta t \cdot f(t_j, c^{t_{j-1}} + k_3) \end{aligned}$$

Keterangan :

c^{j+1} = nilai c pada saat t yang ke $j+1$ (yaitu pada saat t_{j+1})

c^j = nilai c pada saat t yang ke j (yaitu pada saat t_j)

Dari persamaan diatas, dapat terlihat bahwa identifikasi nilai awal berupa c pada saat t_j akan dimasukkan kedalam kalkulasi untuk menghitung nilai c pada saat $t+ t$. Selanjutnya, dilakukan perhitungan ke-empat nilai k , untuk kemudian dihitung nilai rata-rata dari keempat nilai tersebut. Nilai rata-rata dari semua k akan dijadikan input kedalam kalkulasi rumus diatas untuk mendapatkan nilai c yang dicari, yaitu nilai c pada saat $t+ t$, atau yang lebih umum dinamakan c^{j+1} .

3.1.2 Metode *Finite Difference*

Metode beda hingga merupakan metode klasik yang dipergunakan sebagai pendekatan dalam menghitung turunan numerik dalam rangka menyelesaikan suatu pemodelan yang memiliki bentuk persamaan diferensial. Metode beda hingga dapat diturunkan dengan dua cara, yaitu dengan deret Taylor dan dengan hampiran polinom interpolasi. Kedua cara tersebut menghasilkan rumus beda hingga yang sama. Pada penulisan tugas akhir ini, penurunan rumus metode beda hingga tidak dibahas, karena yang menjadi fokus permasalahan adalah aplikasi metode tersebut pada model adveksi-dispersi yang proses diskretisasinya akan diuraikan lebih lanjut pada sub-bab berikut.

Untuk suatu fungsi $f(x,y)$ yang terdefinisi pada suatu selang tertutup $[a,b]$, terdapat tiga pendekatan metode beda hingga dalam menghitung turunan numerik, yang antara lain dapat diklasifikasikan sebagai berikut :

1. Hampiran selisih-maju (*forward difference approximation*)

a. Bentuk turunan pertama

$$f'(x) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x} \quad (3.2)$$

b. Bentuk turunan kedua

$$f''(x) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{\Delta x^2} \quad (3.3)$$

2. Hampiran selisih-mundur (*backward difference approximation*)

a. Bentuk turunan pertama

$$f'(x) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x} \quad (3.4)$$

b. Bentuk turunan kedua

$$f''(x) = \frac{f(x_{i-2}) - 2f(x_{i-1}) + f(x_i)}{\Delta x^2} \quad (3.5)$$

3. Hampiran selisih-pusat (*center difference approximation*)

a. Bentuk turunan pertama

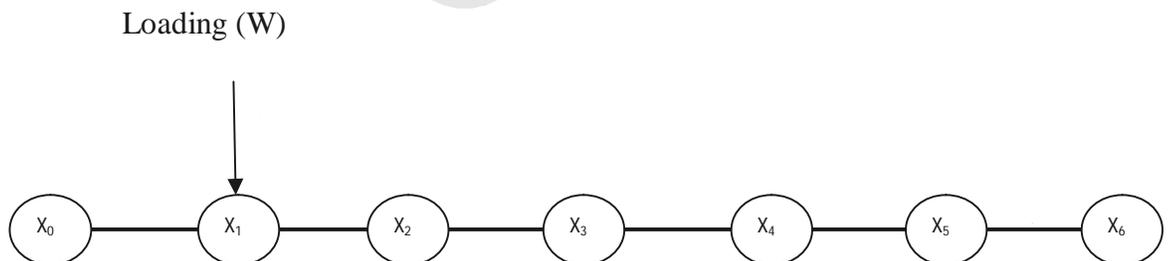
$$f'(x) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2\Delta x} \quad (3.6)$$

b. Bentuk turunan kedua

$$f''(x) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{\Delta x^2} \quad (3.7)$$

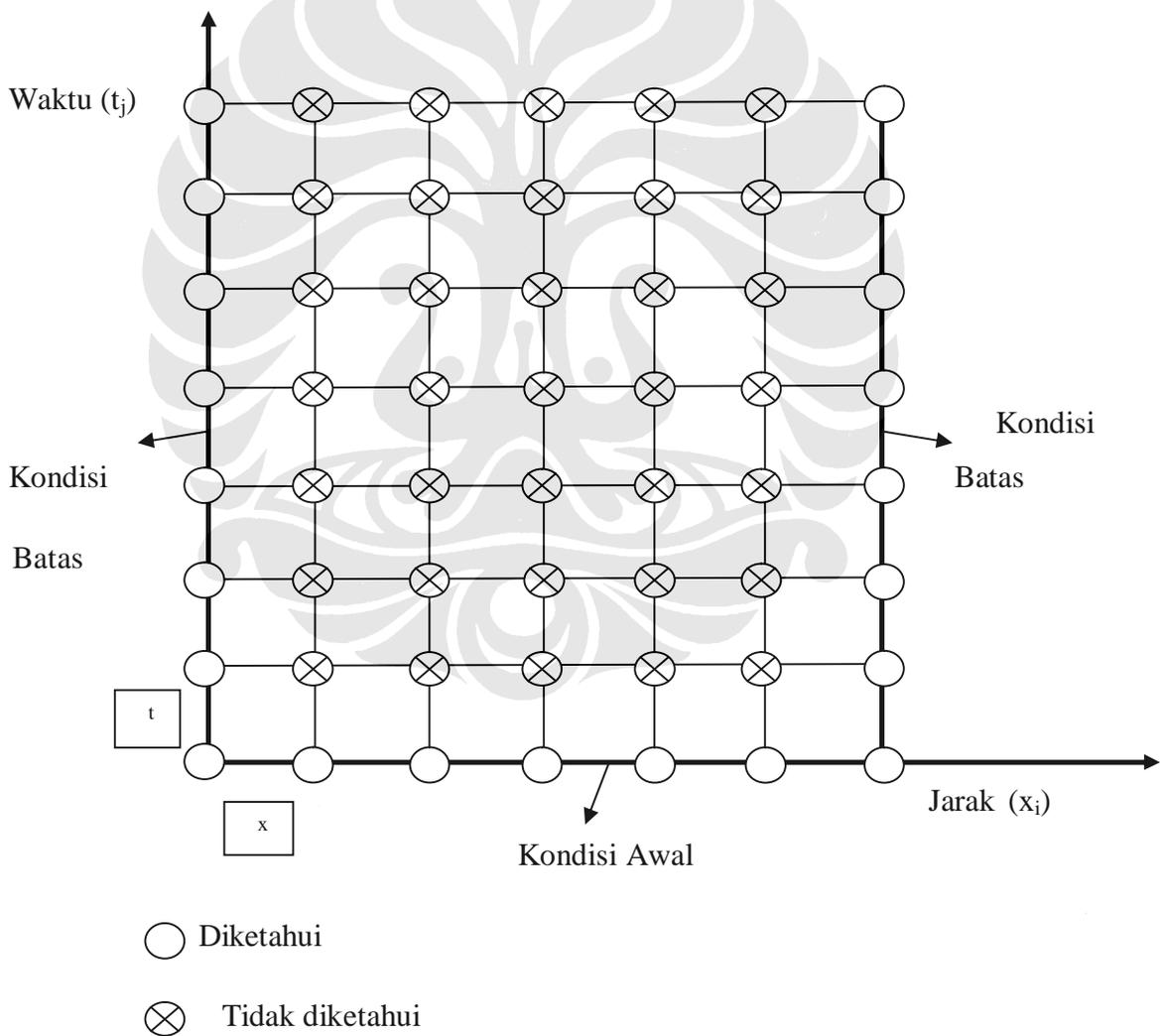
3.2 APLIKASI METODE NUMERIK PADA MODEL ADVEKSI-DISPERSI

Model yang telah dikembangkan secara teoritis dapat diselesaikan melalui pendekatan formulasi numerik. Untuk membuat formulasi numerik, terlebih dahulu harus dilakukan proses diskretisasi ruas sungai yang dibagi menjadi beberapa ruas yang lebih kecil dan sama panjang, seperti pada Gambar (3.3).



Gambar 3.3 Skema diskretisasi jarak pada ruas sungai

Ruas sungai didiskretisasi dalam interval jarak (x_i) dan interval waktu (t_j) seperti pada Gambar (3.4), yang memperlihatkan bahwa konsentrasi BOD didalam aliran sungai akan bervariasi terhadap jarak dan waktu. Dilakukan beberapa skenario yang beragam untuk mendiskretisasi sungai dalam jarak dan waktu, dimana nilai interval jarak x dan nilai interval waktu t divariasikan untuk melihat sensitivitas model terhadap kedua parameter tersebut. Gambar (3.4) memperlihatkan sumbu jarak yang membagi sumbu axis menjadi 7 titik, dan sumbu waktu yang membagi sumbu ordinat menjadi 8 titik, tetapi hanya 4 titik pada ordinat yang diperlihatkan dalam bentuk *output* simulasi pada bab mengenai pembahasan lebih lanjut.



Gambar 3.4 Diskretisasi berdasarkan interval jarak (x) dan interval waktu (t)

3.2.1 Pengembangan Model Formulasi Numerik

Secara umum, model matematis yang dikembangkan secara teoritis dan berlaku untuk BOD maupun konstituen lain yang terkandung dalam aliran ruas sungai, dengan mengabaikan tingkat peluruhan, mekanisme *settling* maupun reaksi kimiawi, dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{W(t)}{V} - u \frac{\partial c}{\partial x} + D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad (3.8)$$

Persamaan diatas merupakan persamaan dasar (*governing equation*), dimana parameter-parameter pada persamaan tersebut merupakan data hipotetik. Persamaan differensial parsial diatas dapat diselesaikan dengan metode beda hingga (*finite difference*) untuk menguraikan tiap suku dari persamaan tersebut, lalu menggunakan metode Runge-Kutta order 4 untuk mencari nilai akhir yang berupa konsentrasi suatu titik pada saat (t+dt).

Dengan pendekatan beda hingga, persamaan untuk setiap turunan pada *governing equation* dapat ditulis sebagai berikut :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{c_i^{j+1} - c_i^j}{\Delta t} \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{c_{i-1}^j - c_i^j}{\Delta x} \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = \frac{c_{i-1}^j - 2c_i^j + c_{i+1}^j}{\Delta x^2} \quad (3.11)$$

Bila persamaan (3.9), persamaan (3.10), persamaan (3.11) disubstitusikan kedalam persamaan (3.8), maka diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$\frac{c_i^{j+1} - c_i^j}{\Delta t} = \frac{W(t)}{V} - u \frac{c_{i-1}^j - c_i^j}{\Delta x} + D \frac{c_{i-1}^j - 2c_i^j + c_{i+1}^j}{\Delta x^2} \quad (3.12)$$

Dengan menggunakan pemisalan $\alpha = \frac{W(t)}{V}$, $\beta = \frac{u}{\Delta x}$, dan $\gamma = \frac{D}{\Delta x^2}$, dengan nilai α , β , dan γ merupakan data hipotetik yang berbentuk konstanta sembarang, dimana skenario simulasi untuk pembebanan dapat berupa kasus beban dengan nilai non-konstan (dimana nilai W merupakan fungsi dari t_j) maupun beban konstan, sehingga persamaan (3.12) dapat dituliskan ulang menjadi :

$$\frac{c_i^{j+1} - c_i^j}{\Delta t} = \alpha - \beta(c_{i-1}^j - c_i^j) + \gamma(c_{i-1}^j - 2c_i^j + c_{i+1}^j) \quad (3.13)$$

Dengan memindahkan Δt ke ruas kanan untuk mempermudah perhitungan, maka persamaan (3.13) dapat diekspresikan sebagai :

$$c_i^{j+1} - c_i^j = \Delta t [\alpha - \beta(c_{i-1}^j - c_i^j) + \gamma(c_{i-1}^j - 2c_i^j + c_{i+1}^j)] \quad (3.14)$$

Agar bilangan *unknown* berbentuk $c(x_i, t_{j+1})$ menjadi satu-satunya suku yang terdapat pada ruas kiri dari persamaan, maka pindahkan suku $c(x_i, t_j)$ ke ruas kanan, sehingga maka persamaan (3.14) dapat dituliskan ulang dalam bentuk :

$$c_i^{j+1} = c_i^j + \Delta t [\alpha - \beta(c_{i-1}^j - c_i^j) + \gamma(c_{i-1}^j - 2c_i^j + c_{i+1}^j)] \quad (3.15)$$

Persamaan (3.15) diatas dapat diselesaikan menggunakan metode Runge-Kutta order ke-empat, dengan perincian rumus sebagai berikut :

$$\Delta t [\alpha - \beta(c_{i-1}^j - c_i^j) + \gamma(c_{i-1}^j - 2c_i^j + c_{i+1}^j)] \equiv \left[\frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \right] \quad (3.16)$$

Keterangan :

$$k_1 = \Delta t \cdot f(t_{j-1}, c^{t_{j-1}})$$

$$k_2 = \Delta t \cdot f\left(t_{j-1} + \frac{1}{2}\Delta t, c^{t_{j-1}} + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = \Delta t \cdot f\left(t_{j-1} + \frac{1}{2}\Delta t, c^{t_{j-1}} + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = \Delta t \cdot f(t_j, c^{t_{j-1}} + k_3)$$

Untuk mencari besar konsentrasi pada titik (x_i) dan pada saat (t_{j+1}), maka persamaan (3.15) dapat diselesaikan dengan mencari besar nilai $k_1, k_2, k_3,$ dan k_4 pada

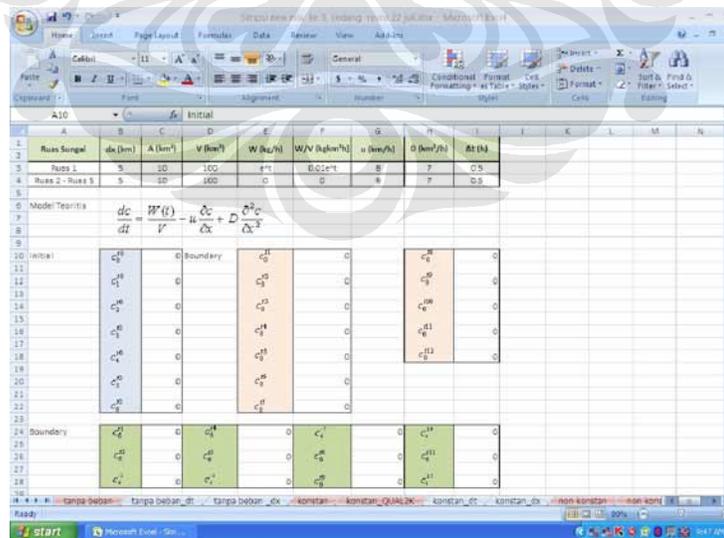
titik yang bersangkutan untuk kemudian menuliskan ulang persamaan tersebut dalam bentuk sebagai berikut :

$$c_i^{j+1} = c_i^j + [\frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)] \quad (3.17)$$

Persamaan ini yang akan diaplikasikan pada setiap bilangan *unknown* berupa titik konsentrasi yang merupakan fungsi dari suatu jarak dan waktu tertentu $[c(x_i,t_j)]$, dan demikian seterusnya komputasi diulang sesuai dengan jumlah yang dibutuhkan, sejumlah titik-titik *bilangan unknown* yang belum diketahui.

3.2.2 Implementasi Spreadsheet

Model matematika yang telah diformulasikan secara numerik, kemudian diselesaikan dengan penggunaan alat bantu berupa *spreadsheet*. Tujuan implementasi formulasi numerik kedalam *spreadsheet* elektronik adalah untuk memudahkan pemodel dalam melakukan perhitungan yang bersifat iteratif, untuk kemudian hasilnya dapat disajikan dalam bentuk atau format berupa grafik yang diinginkan.



Gambar 3.5 Implementasi *spreadsheet* pada formulasi numerik model adveksi-dispersi