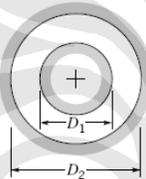


BAB II

DASAR TEORI

2.1 SALURAN TAK BUNDAR

Banyak saluran yang dibuat untuk memindahkan fluida berpenampang tidak bundar. Detil aliran pada saluran berpenampang persegi tergantung pada bentuk penampang yang sebenarnya dan banyak hasil dari pipa bundar dapat diterapkan pada aliran di dalam saluran dengan bentuk-bentuk yang lain.

Shape	Parameter
I. Concentric Annulus $D_h = D_2 - D_1$ 	D_1/D_2 0.0001 0.01 0.1 0.6 1.00
II. Rectangle $D_h = \frac{2ab}{a+b}$ 	a/b 0 0.05 0.10 0.25 0.50 0.75 1.00

Gambar 2.1 Penampang diameter hidrolik (D_h)

Tanpa memperdulikan bentuk penampangnya, digunakanlah pendekatan diameter hidrolik untuk mengetahui diameter penampang selain bundar. Diameter hidrolik adalah empat kali rasio dari luas penampang aliran dibagi dengan keliling terbasahi (P) dari pipa. Diameter hidrolik ini mewakili suatu panjang karakteristik yang mendefinisikan ukuran sebuah penampang dari bentuk yang ditentukan. Faktor 4 ditambahkan dalam definisi D_h . Sehingga diameter hidrolik pipa berpenampang persegi sama dengan diameter pipa berpenampang bundar. Diameter hidrolik dapat didefinisikan sebagai :

$$D_h = \frac{4A}{P} = \frac{4\left(\frac{\pi D^2}{4}\right)}{\pi D} = D(m) \quad (2.1)$$

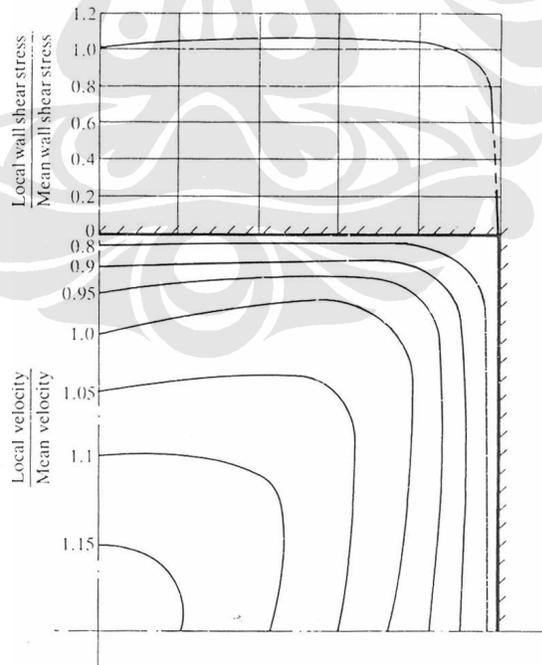
Diameter hidrolik juga digunakan dalam definisi faktor gesekan :

$$h_L = f \left(\frac{L}{D_h} \right) \frac{u^2}{2g} (m) \text{ atau } \Delta p = f \left(\frac{L}{D_h} \right) \frac{\rho u^2}{2} (Pa) \quad (2.2)$$

dan kekasaran relatif :

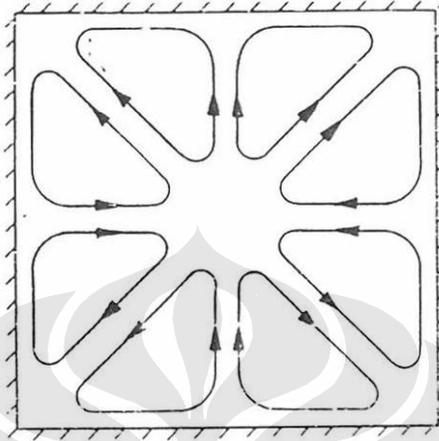
$$\frac{\varepsilon}{D_h} \quad (2.3)$$

Pada saluran berpenampang tak bundar, interaksi antara dinding dan aliran bervariasi menurut posisi. Hal ini akan menghasilkan tegangan geser pada dinding yang tak seragam seperti pada **Gambar 2.2** di bawah. Karena perubahan tekanan statik sepanjang saluran segi empat adalah sama pada sepanjang aliran, maka sebuah mekanisme harus hadir untuk mengkompensasi perubahan tegangan geser dinding yang bervariasi. Mekanisme ini akan menyebabkan pembentukan aliran sekunder (*secondary flow*) yang memindahkan fluida dari daerah tegangan geser yang rendah ke daerah tegangan geser tinggi. Fenomena ini akan menghasilkan distribusi tegangan geser pada dinding dan menyebabkan pertukaran antara tekanan statik dan dinamik sehingga perubahan aliran terjadi antara daerah kecepatan rendah dan tinggi.



Gambar 2.2 Kontur kecepatan dan distribusi tegangan geser pada penampang seper-empat persegi

Gambar 2.3 di bawah menjelaskan jejak aliran dari aliran sekunder pada saluran berpenampang persegi. Kecepatan aliran sekunder mencapai angka maksimum sebesar 1-2 % dari kecepatan aksial.



Gambar 2.3 Jejak aliran sekunder pada saluran berpenampang segiempat

Adapun solusi eksakta dari profil kecepatan aliran laminar di dalam saluran berbentuk persegi didefinisikan oleh Cornish sebagai berikut :

$$f = \frac{64}{\text{Re}} \times \frac{3/2}{\left(1 + \frac{b}{a}\right) \left\{ 1 - \frac{192}{\pi^5} \times \frac{b}{a} \left(\tanh \frac{\pi a}{2b} + \frac{1}{3^5} \tanh \frac{3\pi a}{2b} + \dots \right) \right\}} \quad (2.4)$$

Dimana $\frac{b}{a}$ merupakan aspek rasio dari penampang saluran persegi. Nilai koefisien gesek akan membesar dengan bertambahnya nilai aspek rasio untuk aliran laminar dan turbulen^[1].

2.2 DAERAH MASUK DAN ALIRAN BERKEMBANG PENUH

Setiap fluida yang mengalir dalam sebuah pipa harus memasuki pipa pada suatu lokasi. Daerah aliran di dekat lokasi fluida memasuki pipa disebut sebagai daerah masuk (*entrance region*). Sebagaimana ditunjukkan pada **Gambar 2.4** di bawah, fluida biasanya memasuki pipa dengan profil kecepatan yang hampir seragam pada bagian (1). Selagi fluida bergerak melewati pipa, efek viskos menyebabkannya tetap menempel pada dinding pipa (kondisi lapisan batas tanpa-slip). Hal ini berlaku baik jika fluidanya adalah udara yang relatif *inviscid* ataupun minyak yang sangat viskos. Jadi, sebuah lapisan batas (*boundary layer*) di mana efek viskos menjadi

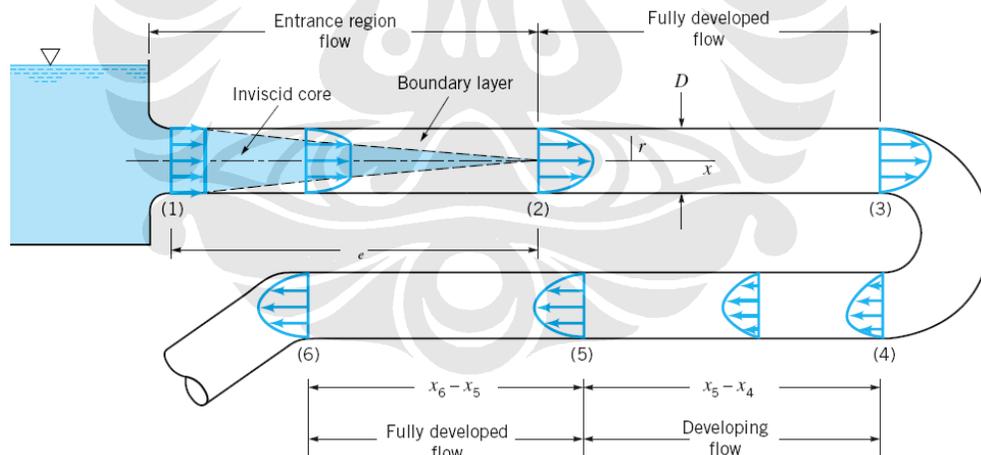
penting timbul di sepanjang dinding pipa sedemikian hingga profil kecepatan awal berubah menurut jarak sepanjang pipa (x) sampai fluida mencapai ujung akhir dari panjang daerah masuk di mana setelah di luar itu profil kecepatan tidak berubah lagi menurut x .

Bentuk dari profil kecepatan di dalam pipa tergantung pada apakah aliran laminar atau turbulen, sebagaimana pula panjang daerah masuk (l_e). Seperti pada banyak sifat lainnya dari aliran pipa, panjang masuk tak berdimensi (l_e/D) berkorelasi cukup baik dengan bilangan Reynolds. Panjang masuk pada umumnya diberikan oleh hubungan :

$$\frac{l_e}{D} = 0,06 Re \text{ untuk aliran laminar} \quad (2.5)$$

dan

$$\frac{l_e}{D} = 4,4 (Re)^{1/6} \text{ untuk aliran turbulen} \quad (2.6)$$



Gambar 2.4 Daerah masuk aliran sedang berkembang dan aliran berkembang penuh di dalam pipa

Perhitungan profil kecepatan dan distribusi tekanan di dalam daerah masuk sangat rumit. Namun, apabila fluida telah mencapai ujung akhir dari daerah masuk, aliran lebih mudah digambarkan karena kecepatan hanyalah fungsi jarak dari sumbu pipa (r) dan tidak tergantung pada x . Hal ini berlaku sampai sifat dari pipa berubah

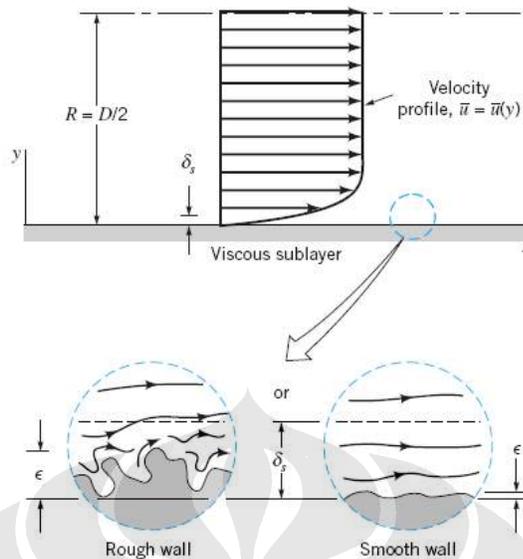
karena sesuatu hal, misalnya perubahan diameter, atau sampai fluida mengalir melalui sebuah belokan, katup, atau komponen lainnya pada bagian (3). Aliran antara (2) dan (3) disebut aliran berkembang penuh (*fully developed*). Setelah gangguan atas aliran berkembang penuh, aliran secara bertahap mulai kembali ke sifat berkembang penuhnya dan terus dengan profil ini sampai komponen pipa berikutnya dicapai [bagian (6)]. Dalam banyak kasus pipa cukup panjang sehingga terdapat panjang aliran berkembang penuh yang lebih besar dibandingkan dengan panjang aliran yang sedang berkembang

2.3 KERUGIAN TEKANAN ALIRAN DALAM PIPA

Kebanyakan analisis aliran pipa turbulen didasarkan pada data-data eksperimen dan rumus-rumus semiempiris, meskipun alirannya telah berkembang penuh. Hasil-hasil ini diberikan dalam bentuk tak berdimensi dan meliputi kisaran parameter aliran yang luas, termasuk berbagai fluida, pipa, dan laju aliran.

Penurunan tekanan dan kerugian *head* dalam sebuah pipa tergantung pada tegangan geser dinding (τ_w) antara fluida dan permukaan pipa. Sebuah perbedaan yang mendasar antara aliran laminar dan turbulen adalah bahwa tegangan geser untuk aliran turbulen adalah fungsi dari kerapatan fluida (ρ). Untuk aliran laminar, tegangan geser tidak tergantung pada kerapatan, sehingga hanya viskositas (μ) yang menjadi sifat fluida yang penting.

Meskipun penurunan tekanan untuk aliran pipa laminar tidak tergantung pada kekasaran pipa, namun ketika membahas aliran turbulen, parameter ini menjadi perlu diikutsertakan. Seperti yang diilustrasikan pada **Gambar 2.5**, aliran turbulen memiliki sebuah sublapisan viskos yang relatif tipis yang terbentuk pada fluida dekat dinding pipa. Dalam banyak hal, lapisan ini sangatlah tipis ($\delta_s/D \ll 1$, dimana δ_s adalah ketebalan sublapisan).



Gambar 2.5 Aliran pada sublapisan viskos (*viscous sublayer*) di dekat dinding kasar dan mulus

Parameter kekasaran pipa ini sering dipresentasikan sebagai faktor gesekan (*friction factor*). Persamaan dari faktor gesekan ini didapat dari persamaan $\Delta p = 32\mu Lu/D^2$. dan membagi kedua ruas dengan tekanan dinamik, $\rho u^2/2$ untuk mendapatkan bentuk tak berdimensi sebagai

$$\frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho u^2} = \frac{(32\mu Lu/D^2)}{\frac{1}{2}\rho u^2} = 64 \left(\frac{\mu}{\rho u D} \right) \left(\frac{L}{D} \right) = \frac{64}{\text{Re}} \left(\frac{L}{D} \right) \quad (2.7)$$

Bentuk ini sering dituliskan sebagai

$$\Delta p = f \frac{L}{D} \frac{\rho u^2}{2} (\text{Pa}) \quad (2.8)$$

dimana bilangan tak berdimensinya (faktor gesekan) adalah

$$f = \Delta p \left(\frac{D}{L} \right) / \left(\frac{\rho u^2}{2} \right) \quad (2.9)$$

Untuk aliran berkembang penuh laminar, nilai f secara sederhana dinyatakan sebagai

$$f = \frac{64}{\text{Re}} \quad (2.10)$$

dan tidak tergantung pada ε/D . Untuk aliran turbulen, ketergantungan fungsional dari faktor gesekan terhadap bilangan Reynolds dan kekasaran relatif (ε/D) agak rumit sehingga belum dapat diperoleh melalui analisis teoritis. Hasil-hasil diperoleh dari banyak eksperimen dan biasanya disajikan dalam bentuk rumus pencocokan kurva atau bentuk-bentuk grafik yang ekuivalen.

Adapun persamaan energi untuk aliran tunak tak mampu-mampat adalah

$$\frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{u_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{u_2^2}{2g} + z_2 + h_L \quad (2.11)$$

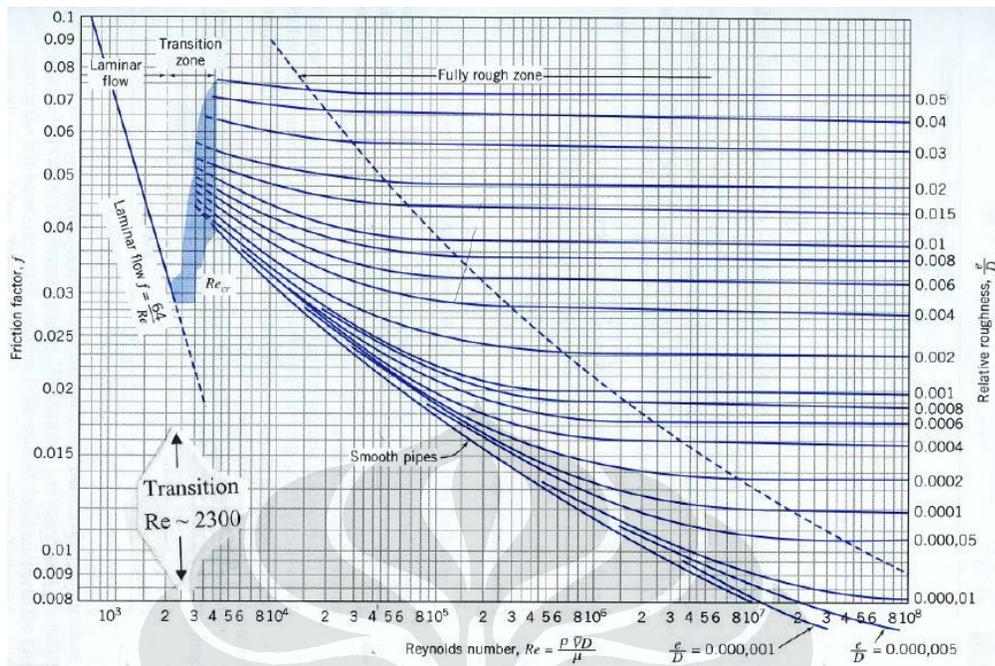
dimana h_L adalah kerugian *head* antara bagian (1) dan (2). Dengan asumsi pipa berdiameter konstan ($D_1 = D_2$ sehingga $u_1 = u_2$), horizontal ($z_1 = z_2$) dengan aliran berkembang penuh ($\alpha_1 = \alpha_2$), persamaan ini menjadi $\Delta p = p_1 - p_2 = \gamma h_L$, yang dapat dikombinasikan dengan Persamaan (2.27) sehingga menghasilkan :

$$h_L = f \frac{L}{D} \frac{u^2}{2g} \quad (2.12)$$

Persamaan (2.12) disebut sebagai persamaan *Darcy-Weisbach* yang berlaku untuk setiap aliran pipa tunak, tak mampu-mampat dan berkembang penuh baik jika pipa tersebut horizontal atau berada pada suatu kemiringan. Secara umum, dengan $u_1 = u_2$ persamaan energi memberikan

$$p_1 - p_2 = \gamma(z_2 - z_1) + \gamma h_L = \gamma(z_2 - z_1) + f \frac{L}{D} \frac{\rho u^2}{2} \text{ (Pa)} \quad (2.13)$$

Sebagian dari perubahan tekanan disebabkan oleh perubahan ketinggian dan sebagian disebabkan oleh kerugian *head* yang berkaitan dengan efek gesekan, yang dinyatakan dalam faktor gesekan (f).

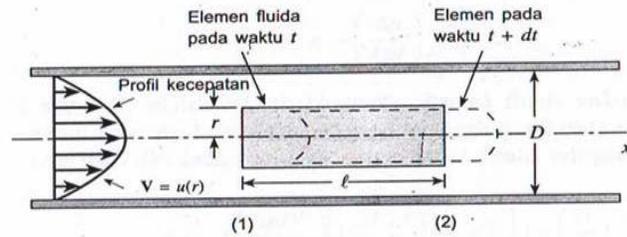


Gambar 2.6 Diagram Moody

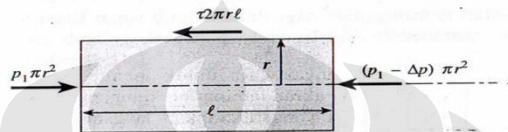
Diagram Moody digunakan untuk menunjukkan ketergantungan fungsional dari f pada Re dan ε/D . Perlu diperhatikan bahwa nilai dari ε/D tidak perlu selalu bersesuaian dengan nilai aktual yang diperoleh melalui suatu penentuan mikroskopik dari ketinggian rata-rata kekasaran permukaan. Diagram Moody ini berlaku secara universal untuk semua aliran pipa yang tunak, berkembang penuh dan tak mampu-mampat. Persamaan berikut dari Colebrook berlaku untuk seluruh kisaran non laminar dalam diagram Moody :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2,0 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{2,51}{Re \sqrt{f}} \right) \quad (2.14)$$

2.4 DARI PENERAPAN LANGSUNG $F=ma$ PADA ELEMEN FLUIDA



Gambar 2.7 Gerakan elemen fluida silindris di dalam sebuah pipa



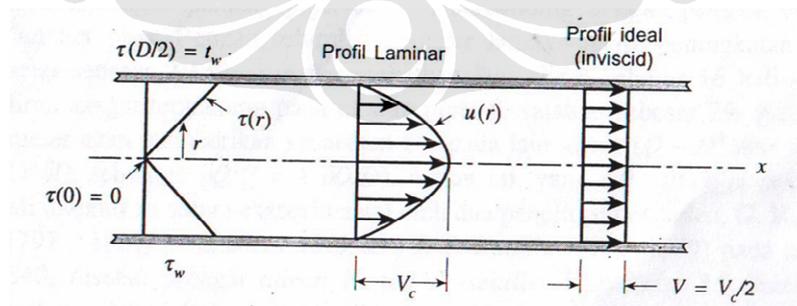
Gambar 2.8 Diagram benda-bebas dari silinder fluida

$$(p_1) \pi r^2 - (p_1 - \Delta p) \pi r^2 - (\tau) 2\pi r l = 0$$

$$\frac{\Delta p}{l} = \frac{2\tau}{r} \quad (2.15)$$

$$\tau = \frac{2\tau_w r}{D_h} \quad (2.16)$$

$$\Delta p = \frac{4l \tau_w}{D_h} \quad (2.17)$$



Gambar 2.9 Distribusi tegangan geser pada fluida di dalam sebuah pipa (aliran laminar atau turbulen) dan profil-profil kecepatan yang khas

$$\tau = -\mu \frac{du}{dr} \quad (2.18)$$

$$\frac{du}{dr} = -\left(\frac{\Delta p}{2\mu l} r\right)$$

$$\int du = -\left(\frac{\Delta p}{2\mu l}\right) \int r dr$$

$$u = -\left(\frac{\Delta p}{4\mu l}\right) r^2 + C_1$$

$u = 0$ pada $r = D_h/2$, jadi $C_1 = \left(\frac{\Delta p}{16\mu l}\right) D_h^2$

$$u(r) = \left(\frac{\Delta p}{16\mu l}\right) D_h^2 \left[1 - \left(\frac{2r}{D_h}\right)^2\right] = V_c \left[1 - \left(\frac{2r}{D_h}\right)^2\right] \quad (2.19)$$

$$V_c = \left(\frac{\Delta p}{16\mu l}\right) D_h^2$$

$$u(r) = \frac{\tau_w D_h}{4\mu} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

$R = D_h/2$ adalah jari-jari pipa

$$Q = \int u dA = \int_{r=0}^{r=R} u(r) 2\pi r dr = 2\pi V_c \int_0^R \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] r dr$$

Atau

$$Q = \frac{\pi R^2 V_c}{2}$$

$$V = Q/A = Q/\pi R^2$$

$$V = \frac{\pi R^2 V_c}{2\pi R^2} = \frac{V_c}{2} = \frac{\Delta p D_h^2}{32\mu l} \quad (2.20)$$

$$Q = \frac{\pi D_h^4 \Delta p}{128 \mu l} \quad (2.21)$$

$$A^*V = \frac{\pi D_h^4 \Delta p}{128 \mu l}$$

$$\frac{\pi D_h^2}{4} V = \frac{\pi D_h^4 \Delta p}{128 \mu l}$$

$$\frac{\Delta p}{\gamma} = \frac{64}{\text{Re}} \frac{V^2 L}{2gD_h}, \text{ dimana } f = \frac{64}{\text{Re}}$$

$$\frac{\Delta p}{\gamma} = f \frac{V^2 L}{2gD_h} \quad (2.22)$$

Berdasarkan hokum Bernoulli

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_L$$

$$V_1 = V_2$$

$$Z_1 = Z_2$$

$$h_L = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{\Delta p}{\gamma}$$

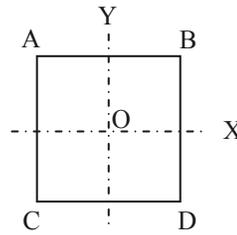
$$h_L = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{\Delta p}{\gamma} = f \frac{V^2 L}{2gD_h}$$

jadi

$$h_L = f \frac{V^2 L}{2gD_h} \quad (2.23)$$

2.5 Formula Teoretis Aliran Stream Line

Formula ini dibuat dengan menggunakan sumbu koordinat pada penampang pipa, dimana OY merupakan garis sumbu yang sejajar dengan arah vertikal, OX pada arah horizontal dan OZ sejajar dengan sumbu pipa.



Gambar 2.10 Penampang Depan Saluran Persegi

Formula ini digunakan untuk mendapatkan faktor gesek menurut teori R.J.Cornish.

Rumus umum dan asumsi-asumsi yang digunakan antara lain adalah

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \frac{\partial p}{\partial z} = \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2.24)$$

Dua persamaan pertama menunjukkan bahwa tekanan konstan di sepanjang penampang.

$$\text{Misalkan } \tau = -\frac{1}{2\mu} \times \frac{\partial p}{\partial z}, \text{ dan } w = \chi + \tau(b^2 + y^2)$$

Sebuah objek memperkenalkan χ sebagai penyederhanaan kondisi batas.

$$\text{Sepanjang boundary } \chi + \tau(b^2 - y^2) = w = 0 \quad (2.25)$$

$$\text{Untuk sepanjang AB dan CD } \chi = 0 \quad (2.26)$$

$$\text{Sedangkan sepanjang AD dan BC } \chi = -\tau(b^2 - y^2) \quad (2.27)$$

Semua bentuk χ diubah ke bentuk $\eta \cos \frac{(2n+1)\pi y}{2b}$ dimana η adalah fungsi x saja dan n adalah bilangan bulat.

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} = 0 \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} - m^2 \eta = 0 \quad (2.29)$$

$$\eta = A_n \cosh mx + B_n \sinh mx \quad (2.30)$$

Karena simetris terhadap Oy, $B_n = 0$; sehingga

$$\eta = A_n \cosh mx \quad (2.31)$$

dan χ tersusun dari bentuk $A_n \cosh mx \times \cos my$ dimana $m = \frac{(2n+1)\pi}{2b}$

$$y = \frac{2b\theta}{\pi} \quad (2.32)$$

maka

$$\chi = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \cosh \frac{(2n+1)\pi x}{2b} \cos(2n+1)\theta \quad (2.33)$$

$$\chi = f(\theta) = \frac{4b^2 \tau (4\theta^2 - \pi^2)}{4\pi^2} \quad (2.34)$$

$$\chi = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \cosh \frac{(2n+1)\pi x}{2b} \cos(2n+1)\theta \quad (2.35)$$

Lalu kita ekspansi persamaan di atas dalam Deret Fourier.

Misalkan

$$\chi = f(\theta) = \frac{4b^2 \tau (4\theta^2 - \pi^2)}{4\pi^2} = \frac{b^2 \tau (4\theta^2 - \pi^2)}{\pi^2} \text{ dalam } (-a, a) \quad (2.36)$$

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi\theta}{a}\right) d\theta \quad (2.37)$$

dimana

$$a_n = \frac{2\pi}{na} \int_0^a \frac{f(\theta)\pi}{n} \cos\left(\frac{n\pi\theta}{a}\right) d\theta \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2\pi}{na} \int_0^a \frac{b^2 \tau (4\theta^2 - \pi^2)}{\pi^2} \cos\left(\frac{n\pi\theta}{a}\right) d\theta \\
a_n &= \frac{2}{n\pi a} \int_0^a (4b^2 \tau \theta^2 - b^2 \tau \pi^2) \cos\left(\frac{n\pi\theta}{a}\right) d\theta \\
a_n &= \frac{2}{n\pi a} \int_0^a \left\{ 4b^2 \tau \theta^2 \cos\left(\frac{n\pi\theta}{a}\right) - b^2 \tau \pi^2 \cos\left(\frac{n\pi\theta}{a}\right) \right\} d\theta \\
\int_0^a 4b^2 \tau \theta^2 \cos\left(\frac{n\pi\theta}{a}\right) d\theta &= 4b^2 \tau \theta^2 \times \frac{a}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi\theta}{a}\right) - \int_0^a \frac{a}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi\theta}{a}\right) \times 8b^2 \tau \theta d\theta \\
\int_0^a 4b^2 \tau \theta^2 \cos\left(\frac{n\pi\theta}{a}\right) d\theta &= 4b^2 \tau \theta^2 \times \frac{a}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi\theta}{a}\right) - \frac{8b^2 \tau \theta a}{n\pi} \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi\theta}{a}\right) d\theta \\
\int_0^a 4b^2 \tau \theta^2 \cos\left(\frac{n\pi\theta}{a}\right) d\theta &= 4b^2 \tau \theta^2 \times \frac{a}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi\theta}{a}\right) - \frac{8b^2 \tau \theta a}{n\pi} \times -\cos\left(\frac{n\pi\theta}{a}\right) \times \frac{a}{n\pi} \\
\int_0^a 4b^2 \tau \theta^2 \cos\left(\frac{n\pi\theta}{a}\right) d\theta &= \frac{4b^2 \tau \theta^2 a}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi\theta}{a}\right) + \frac{8b^2 \tau \theta a^2}{n^2 \pi^2} \cos\left(\frac{n\pi\theta}{a}\right) \\
\int_0^a b^2 \tau \pi^2 \cos\left(\frac{n\pi\theta}{a}\right) d\theta &= b^2 \tau \pi^2 \int_0^a \cos\left(\frac{n\pi\theta}{a}\right) d\theta \\
\int_0^a b^2 \tau \pi^2 \cos\left(\frac{n\pi\theta}{a}\right) d\theta &= \frac{b^2 \tau \pi a}{n} \sin\left(\frac{n\pi\theta}{a}\right) \\
a_n &= \frac{2}{n\pi a} \left\{ 4b^2 \tau \theta^2 \times \frac{a}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi\theta}{a}\right) \Big|_0^a + \frac{8b^2 \tau \theta a^2}{n^2 \pi^2} \cos\left(\frac{n\pi\theta}{a}\right) \Big|_0^a - \frac{b^2 \tau \pi a}{n} \sin\left(\frac{n\pi\theta}{a}\right) \Big|_0^a \right\} \\
a_n &= \frac{2}{n\pi a} \left\{ \frac{4b^2 \tau \theta a}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{a}\right) - \frac{4b^2 \tau \theta a}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi 0}{a}\right) + \frac{8b^2 \tau \theta a^2}{n^2 \pi^2} \cos\left(\frac{n\pi}{a}\right) - \frac{8b^2 \tau \theta a^2}{n^2 \pi^2} \cos\left(\frac{n\pi 0}{a}\right) - \frac{b^2 \tau \pi a}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{a}\right) + \frac{b^2 \tau \pi a}{n} \sin\left(\frac{n\pi 0}{a}\right) \right\} \\
a_n &= \frac{2}{n\pi a} \left\{ \frac{4b^2 \tau \theta^2 a}{n\pi} \sin(n\pi) - \frac{4b^2 \tau \theta^2 a}{n\pi} \sin(0) + \frac{8b^2 \tau \theta a^2}{n^2 \pi^2} \cos(n\pi) - \frac{8b^2 \tau \theta a^2}{n^2 \pi^2} \cos(0) - \frac{b^2 \tau \pi a}{n} \sin(n\pi) + \frac{b^2 \tau \pi a}{n} \sin(0) \right\} \\
a_n &= \frac{2}{n\pi a} \left\{ \frac{4b^2 \tau \theta^2 a}{n\pi} \sin(n\pi) + \frac{8b^2 \tau \theta a^2}{n^2 \pi^2} \cos(n\pi) - \frac{8b^2 \tau \theta a^2}{n^2 \pi^2} - \frac{b^2 \tau \pi a}{n} \sin(n\pi) \right\}
\end{aligned}$$

$$a_0 = 0$$

$$\chi = -\frac{32tb^2}{\pi^3} \left\{ \cos \theta - \frac{1}{3^3} \cos 3\theta + \frac{1}{5^3} \cos 5\theta - \dots \right\} \quad (2.39)$$

$$w = -\frac{32tb^2}{\pi^3} \left\{ \cos \theta - \frac{1}{3^3} \cos 3\theta + \frac{1}{5^3} \cos 5\theta - \dots \right\} + \tau(b^2 - y^2) \quad (2.40)$$

$$Q = \int_{-b-a}^b \int_0^a w dx dy \quad (2.41)$$

$$2 \int_0^a \tau(b^2 - y^2) dx = 2 \left\{ \tau(b^2 - y^2) x \right\}_0^a$$

$$2 \int_0^a \tau(b^2 - y^2) dx = 2 \tau a (b^2 - y^2)$$

$$2 \int_0^b (2 \tau a b^2 - 2 \tau a y^2) dy = 2 \left\{ 2 \tau a b^2 y \right\}_0^b - \frac{2}{3} \tau a y^3 \Big|_0^b$$

$$2 \int_0^b (2 \tau a b^2 - 2 \tau a y^2) dy = 4 \tau a b^3 - \frac{4}{3} \tau a b^3$$

$$2 \int_0^b (2 \tau a b^2 - 2 \tau a y^2) dy = \frac{8}{3} \tau a b^3$$

$$4 \int_0^b \int_0^a \tau(b^2 - y^2) dx dy = -\frac{4}{3} \frac{ab^3}{\mu} \frac{dp}{dz}$$

$$2 \int_0^b \int_0^a w dx dy = 4 \int_0^b \int_0^a \frac{-32tb^2}{\pi^3} \left(\frac{\cosh(n\pi x/2b) \cdot \cos(n\pi y/2b)}{n^4 \pi \cosh(n\pi a/2b)} \right) dx dy$$

$$2 \int_0^b \int_0^a w dx dy = 4 \int_0^b \int_0^a \frac{-32tb^2}{\pi^4 n^4 \cosh(n\pi a/2b)} \left\{ \cosh\left(\frac{n\pi}{2b}(x+y)\right) + \cosh\left(\frac{n\pi}{2b}(x-y)\right) \right\} dx dy$$

$$2 \int_0^b \int_0^a w dx dy = \frac{-64tb^2}{\pi^4 n^4 \cosh(n\pi a/2b)} \left\{ \int_0^b \int_0^a \cosh\left(\frac{n\pi}{2b}(x+y)\right) dx dy + \int_0^b \int_0^a \cosh\left(\frac{n\pi}{2b}(x-y)\right) dx dy \right\}$$

$$Q = -\frac{4}{3} \cdot \frac{ab^3}{\mu} \cdot \frac{dp}{dz} \left\{ 1 - \frac{192}{\pi^5} \cdot \frac{b}{a} \left(\tanh \frac{\pi a}{2b} + \frac{1}{3^5} \cdot \tanh \frac{3\pi a}{2b} + \dots \right) \right\}$$

untuk a = b, maka nilai

$$Q = -0.562 \cdot \frac{a^4}{\mu} \cdot \frac{dp}{dz} \quad (2.42)$$

$$f = \frac{0.25}{\left[\log \left(\frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{5.74}{\text{Re}^{0.9}} \right) \right]^2} \quad (2.39)$$